Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 1. 2021 и фуллерены

Обозначим **V** число вершин, тогда число ребер равно

$$\mathbf{E} = 1{,}5\mathbf{V}$$

(в каждой вершине сходится по 3 ребра, но каждое ребро принадлежит двум вершинам).

Общее число граней можно записать как

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6}.$$

Выразим число вершин через число граней:

$$\mathbf{V} = 5/3\mathbf{F_5} + 6/3\mathbf{F_6}$$

(каждая пяти- (шестиугольная) грань дает 5 (6) вершин, но каждая вершина принадлежит трем граням).

Тогда число ребер

$$\mathbf{E} = 1{,}5(5/3\mathbf{F_5} + 2\mathbf{F_6}) = 2{,}5\mathbf{F_5} + 3\mathbf{F_6}.$$

Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

$$\mathbf{V} + \mathbf{F} - \mathbf{E} = 2.$$

Таким образом,

$$5/3\mathbf{F_5} + 2\mathbf{F_6} + \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6} - 2{,}5\mathbf{F_5} - 3\mathbf{F_6} = 2$$

$$\text{или } \mathbf{F_5} = 12.$$

То есть, любой многогранник, составленный из пяти- и шестиугольников, сходящихся в вершинах по три, всегда содержит строго 12 пятиугольников.

Тогда:

- число вершин фуллерена $\mathbf{V} = 5/3\cdot 12 + 2\mathbf{F_6} = 20 + 2\mathbf{F_6}$,
- число ребер фуллерена $\mathbf{E} = 2{,}5\cdot 12 + 3\mathbf{F_6} = 30 + 3\mathbf{F_6}$,
- число граней фуллерена $\mathbf{F} = 12 + \mathbf{F_6}$.

То есть, $\mathbf{V} \geq 20$ и $\mathbf{V} \vdots 2$, $\mathbf{E} \geq 30$ и $\mathbf{E} \vdots 3$, $\mathbf{F} \geq 12$.

Рассмотрим число **2021**:

- оно нечетное (не делится на 2),
- сумма его чисел 2 + 0 + 2 + 1 = 5 не делится на 3, то есть, 2021 не делится без остатка на 3,

Следовательно, фуллеренов, имеющих 2021 вершину либо 2021 ребро <u>не существует</u>.

Если число граней фуллерена составляет **F** = 2021, то

$$\mathbf{F_5} = 12,$$

$$\mathbf{F_6} = 2021 - 12 = 2009,$$

$$\mathbf{V} = 20 + 2 \cdot 2009 = 4038,$$

$$\mathbf{E} = 30 + 3 \cdot 2009 = 6057.$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 2. Спираль коронавируса

Согласно рис. 2 условия, длина одного витка спирали РНК составляет

$$AB = \sqrt{H^2 + (D \cdot \pi)^2} = \sqrt{14^2 + (6 \cdot 3{,}14)^2} = 23{,}5 \text{ нм.}$$

На один такой виток приходится

$$\mathbf{n} = \mathbf{AB/l} = 23{,}5/0{,}5 = 47 \text{ нуклеотидов.}$$

Тогда весь геном укладывается в

$$\mathbf{N/n} = 30000/47 = 638{,}3 \text{ витков,}$$

то есть, неполных 639 витков,

но, поскольку спираль намотана на одно веретено «туда и назад», то длина нуклеокапсида составляет

$$\mathbf{L} = 639/2 \cdot 14 = 4473 \text{ нм.}$$

Объем нуклеокапсида можно оценить как объем цилиндра длиной **L** и диаметром $\mathbf{D_N}$:

$$V_N = \pi \frac{D_N^2}{4} L$$

Тогда, зная долю, которую нуклеокапсид занимает в объеме сферической частицы вируса, найдем диаметр этой частицы:

$$V_N = \omega V_0 = \omega \frac{4}{3} \pi \frac{D_0^3}{8}$$

Преобразуя полученное выражение, получаем

$$D_0^3 = 1{,}5 D_N^2 L/\omega$$

$$\boldsymbol{D_0} = \sqrt[3]{\frac{1{,}5 D_N^2 L}{\omega}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}5 \cdot 16^2 \cdot 4473}{0{,}6}} = 142 \text{ нм.}$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 3. Полипептид как цепочка букв

1. Полипептид представляет собой кольцо из 10-ти «букв», в котором дважды повторяется последовательность [FPVOL]:
   - только кольцевой пептид с четным числом букв при разрывах связей через одну не дает однобуквенных фрагментов;
   - пары букв FP, LF, OL, PV, VO задают однозначную последовательность (L)[FPVOL](F);
   - при разрезании кольцевой последовательности в двух местах получить один единственный фрагмент можно только при условии, что кольцо разбивается на две одинаковых части. Поскольку такие половинки содержат по 5 букв, то кольцо состоит из 10 букв.
2.
   а) Внести два разрыва в кольцо из десяти одинаковых «букв» можно пятью способами: 1+9, 2+8, 3+7, 4+6 и 5+5. В случае $[FPVOL]_2$ каждый из фрагментов заданной длины может стартовать с пяти разных «букв», то есть, общее число способов внести два разреза в полипептид **X** равно $5 \cdot 5 = 25$.

   б) Разорвав две связи в кольцевом пептиде длиной десять «букв» случайным образом, можно получить фрагменты длиной: 1 и 9 «букв», 2 и 8 «букв», 3 и 7 «букв», 4 и 6 «букв», 5 и 5 «букв». То есть, применив к молекулам такого пептида все возможные способы разрыва двух связей, мы получим фрагменты длиной 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 «букв».

   в) Поскольку для полипептида $[FPVOL]_2$каждый из фрагментов разной длины может стартовать с пяти разных «букв», то каждой длине отвечает по пять вариантов структуры.

   г) Вероятность того, что в результате случайного разрыва двух связей получится фрагмент, описанный в пункте 1б, равна

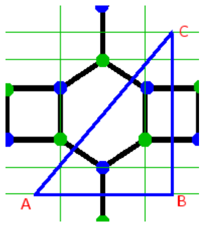
$$P = 5/25 = 0{,}2.$$

*(5 – число вариантов разрыва полипептида **X** на два фрагмента одинаковой длины, 25 – общее число вариантов разрыва двух связей, см. п. 2а)*

3. Разрезая исходный пептид всеми возможными способами, мы можем получить фрагменты длиной 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 (один разрез в кольце) «букв», каждый из которых может стартовать с пяти разных «букв», то есть, общее число возможных структур фрагментов полипептида **X** равно $10 \cdot 5 = 50$.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 4. Каркасные молекулы нитрида бора

1.



Для вычисления длины единичного отрезка, равной длине стороны базового ромба, рассмотрим Δ**ABC**, отвечающий одной четверти этого ромба (на примере варианта II). Вершины этого треугольника лежат в центрах восьмиугольников.

Здесь ∠**ABC** = 90°, поскольку стороны **AB** и **BC** параллельны взаимно перпендикулярным сторонам квадрата сетки B_xN_x.

При этом

$$\mathbf{AB} = 0{,}5a+\sqrt{3}a+0{,}5a$$

(две половинки ребра BN и малая диагональ правильного шестиугольника),

$$\mathbf{BC} = 0{,}5a+2a+0{,}5a$$

(две половинки ребра BN и большая диагональ правильного шестиугольника).

Длину стороны **AC**, равную **L**, можно найти, используя теорему Пифагора для Δ**ABC**:

$$\mathbf{L} = \mathbf{AC} = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{\left(0{,}5a+\sqrt{3}\cdot a+0{,}5a\right)^2 + (0{,}5a+2a+0{,}5a)^2}$$

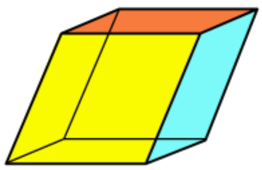
$$\mathbf{L} = \sqrt{\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot a\right)^2 + 3a^2} = a\sqrt{13+2\sqrt{3}}$$

Углы между сторонами ромба равны удвоенным ∠**BAC** и ∠**ACB**:

$$\boldsymbol{\alpha} = 2\arcsin\left(\frac{BC}{AC}\right) = 2\arcsin\left(\frac{3a}{a\sqrt{13+2\sqrt{3}}}\right) = 95{,}35°,$$

$$\boldsymbol{\beta} = 2(90° - \boldsymbol{\alpha}/2) = 180° - \boldsymbol{\alpha} = 180° - 95{,}35° = 84{,}65°.$$

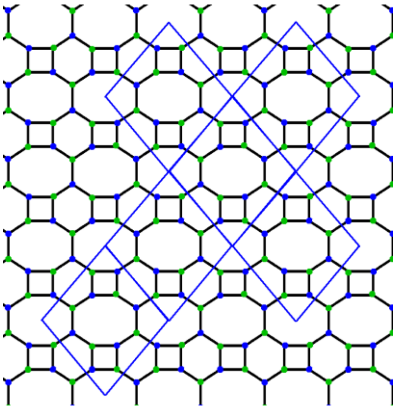
2. Многогранником, составленным из ромбов, является ромбоэдр (фигура из шести ромбов, сходящихся в каждой вершине по 3).



В двумерной сетке, формирующей лист B_xN_x, базовые ромбы сходятся в узлах по 4. Следовательно, чтобы сформировать двумерную «выкройку» трехмерного ромбоэдра, нам надо «убрать» из каждого узла один ромб. При этом только базовый ромб II при склейке «выкройки» может образовывать в ее «вершинах» многоугольники, составленные из ребер, соединяющих разнородные атомы.

«Выкройка», построенная на основе базового ромба I, подразумевает «склейку» фрагментов разнородных атомов, а базовый ромб III формирует каркас с пятиугольниками, в которых неизбежно будут соседствовать однородные атомы.

3.



Общее число:

- квадратов B_2N_2 (на один базовый ромб приходится два квадрата)

$$\mathbf{F_4} = 2\cdot6 = 12,$$

- восьмиугольников B_4N_4 (на один базовый ромб приходится один восьмиугольник)

$$\mathbf{F_8} = 1\cdot6 = 6,$$

- шестиугольников B_3N_3 (по одному шестиугольнику приходится как на каждое ребро ромбоэдра, так и на каждую вершину, образовавшуюся при «склейке» трех базовых ромбов)

$$\mathbf{F_6} = 1\cdot12 \text{ (число ребер ромбоэдра)} + 1\cdot8 \text{ (число вершин ромбоэдра)} = 20,$$

- вершин (суммарное число атомов B и N в каркасе)(на один базовый ромб приходится 6 атомов B и 6 атомов N)

$$\mathbf{V} = (6 + 6)\cdot6 = 72,$$

- ребер BN (на один базовый ромб приходится 14 целых ребер BN и 8 половинок ребер BN)

$$\mathbf{E} = (14 + 8\cdot0{,}5)\cdot6 = 108$$

или $\mathbf{E} = 3/2\cdot72 = 108$

(в каждой вершине сходится по три ребра, каждое ребро принадлежит двум вершинам).

Следовательно,

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}/2 = 36.$$

4. Увеличение длины ребра ромбоэдра в **n** раз ведет к увеличению числа базовых ромбов, приходящихся на одну грань ромбоэдра, (а, следовательно, и числа вершин) в $\mathbf{n}^2$ раз. Тогда:

$$\mathbf{x} = 36\mathbf{n}^2.$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 5. Нанопористое углеволокно

1.

а) Пусть длина отдельного волокна равна **L**, тогда его объем равен

$$\mathbf{V_1 = \pi D^2 L/4}, \tag{1}$$

а объем одной поры, длина которой **L’** в рамках упрощенной модели структуры НУВ равна длине всего волокна **L**, –

$$\mathbf{V_2 = \pi d^2 L/4}. \tag{2}$$

В то же время, площадь поверхности волокна составляет

$$\mathbf{S_1 = \pi DL} \tag{3}$$

(при **L** >> **D** вклад площади торцов цилиндра можно не учитывать), а площадь поверхности поры, соответственно,

$$\mathbf{S_2 = \pi dL}. \tag{4}$$

По определению, величина удельной площади поверхности равна отношению суммарной площади поверхности материала **S** к его массе **m**, которую, в свою очередь, можно записать через **ρ** и объем материала **V**:

$$\boldsymbol{S}_{\text{уд}} = \frac{S}{m} = \frac{S}{\rho V}. \tag{5}$$

Обозначим число пор в отдельном волокне как **N**.

Тогда, выразив **S** через **N**, (3) и (4) как сумму $\mathbf{S_1}$ и площадей всех пор, а **V** – через **N**, (1) и (2) как разность $\mathbf{V_1}$ и объема всех пор, $\mathbf{S_{уд}}$ можно записать как

$$\boldsymbol{S}_{\text{уд}} = \frac{S_1+\mathrm{NS}_2}{\rho(V_1-\mathrm{NV}_2)} = \frac{\pi\mathrm{DL}+\mathrm{N}\pi\mathrm{dL}}{\rho(\pi\mathrm{D}^2\, L/4-\mathrm{N}\pi\mathrm{d}^2\, L/4)} = 4\frac{\mathrm{D}+\mathrm{Nd}}{\rho(D^2-\mathrm{Nd}^2)}. \tag{6}$$

б) Считаем, что **δ** для НУВ диаметром **D** примерно совпадает с долей пор, отвечающей модели, приведенной на рис. 3 условия. Эта доля равна отношению площади пор, приходящейся на треугольник с центрами в трех ближайших порах, к площади такого треугольника:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{3\cdot(1/6)\cdot\pi\mathrm{d}^2/4}{0{,}5\cdot\sqrt{3}/2\cdot(\mathrm{d}+\mathrm{h})^2} = \frac{\pi\mathrm{d}^2}{2\sqrt{3}(\mathrm{d}+\mathrm{h})^2}. \tag{7}$$

2. Из формулы (6) можно выразить **N** как

$$\boldsymbol{N} = \frac{S_{уд}\rho D^2-4D}{S_{уд}\rho d^2+4d}. \tag{8}$$

В то же время, число пор в отдельном волокне можно оценить исходя из **δ**, а также площадей сечения отдельной поры и самого волокна:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\pi D^2/4}{\pi d^2/4}\cdot\delta = \frac{D^2}{d^2}\cdot\frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2} = \frac{\pi D^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2}. \quad (9)$$

Приравнивая (8) к (9), и упрощая полученное выражение, получаем квадратное уравнение относительно **d**:

$$\frac{S_{уд}\rho D^2 - 4D}{S_{уд}\rho d^2 + 4d} = \frac{\pi D^2}{2\sqrt{3}(d+h)^2}, \quad (10.1)$$

$$\left(S_{уд}\rho D - 4\right)\cdot 2\sqrt{3}(d+h)^2 = \pi D\cdot\left(S_{уд}\rho d^2 + 4d\right), \quad (10.2)$$

$$2\sqrt{3}\left(S_{уд}\rho D - 4\right)\cdot\left(d^2 + 2dh + h^2\right) = \pi S_{уд}\rho D d^2 + 4\pi D d, \quad (10.3)$$

$$\left(2\sqrt{3}\left(S_{уд}\rho D - 4\right) - \pi S_{уд}\rho D\right)d^2 + \left(2\sqrt{3}\left(S_{уд}\rho D - 4\right)2h - 4\pi D\right)d + 2\sqrt{3}\left(S_{уд}\rho D - 4\right)h^2 = 0 \quad (10.4)$$

Для того, чтобы решить (10.4), запишем и вычислим его дискриминант:

$$\text{Đ} = \left[16\left(\sqrt{3}h\left(S_{уд}\rho D - 4\right) - \pi D\right)^2\right] - \left[8\sqrt{3}h^2\left(2\sqrt{3}\left(S_{уд}\rho D - 4\right) - \pi S_{уд}\rho D\right)\cdot\left(S_{уд}\rho D - 4\right)\right] \quad (11)$$

Дискриминант равен **Đ** = $3{,}86\cdot10^{-13}$ (все линейные размеры выражены в метрах).

Тогда диаметр пор НУВ составляет

$$\boldsymbol{d} = \frac{1{,}62\cdot10^{-6} \pm 2{,}62\cdot10^{-7}}{2\cdot 26{,}83}\ \text{м}, \quad (12)$$

d = $1{,}85\cdot10^{-8}$ м = 18,5 нм

или **d** = $4{,}17\cdot10^{-8}$ м = 41,7 нм.

3. Сопоставляя диаметр пор на рис. 2 условия с длиной бара на этих микрофотографиях, можно получить величины порядка 30 – 70 нм, следовательно, средний диаметр пор НУВ ближе к **d** = 41,7 нм, чем к **d** = 18,5 нм.

Поскольку **L'** = **L**, то объемная доля пор **ω** в волокне равна **δ** (см. (7)):

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\delta} = \frac{3{,}14\cdot 41{,}7^2}{2\sqrt{3}(41{,}7+7)^2} = 0{,}665. \quad (13)$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 6. Ошибка тест-системы

1. Предположим, что тестом **X** будут протестированы все жители.

   Введем следующие обозначения:

   - **ω** – доля больных среди жителей,
   - **N** – общее число жителей,
   - **S** – специфичность теста **X**,
   - **R** – чувствительность теста **X**,
   - **D**, **D⁺**, **D⁻** – общее число больных жителей и число больных жителей, которые могут получить положительный и отрицательный результат теста **X**, соответственно,
   - **H**, **H⁺**, **H⁻** – общее число здоровых жителей и число здоровых жителей, которые могут получить положительный и отрицательный результат теста **X**, соответственно.

   По определению,

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}^-/\mathbf{H},$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^+/\mathbf{D}.$$

   Поскольку

$$\mathbf{D} = \mathbf{N\omega}$$
$$\text{и } \mathbf{H} = \mathbf{N} - \mathbf{N\omega} = \mathbf{N}(1 - \boldsymbol{\omega}),$$

   то

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{RD} = \mathbf{Rn\omega},$$
$$\mathbf{D}^- = \mathbf{N\omega}(1 - \mathbf{R}),$$
$$\mathbf{H}^- = \mathbf{SN}(1 - \boldsymbol{\omega}),$$
$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{N}(1 - \boldsymbol{\omega})(1 - \mathbf{S}).$$

   а) Вероятность того, что при тестировании всех жителей тестом **X** здоровый житель получит ложноположительный результат равна отношению таких результатов к общему числу положительных результатов:

$$\boldsymbol{\delta_1} = \mathbf{H}^+/(\mathbf{D}^+ + \mathbf{H}^+) = \frac{N(1-\omega)(1-S)}{\text{RN}\omega\text{+N}(1-\omega)(1-S)} = \frac{(1-\omega)(1-S)}{\text{R}\omega\text{+}(1-\omega)(1-S)}$$

$$\boldsymbol{\delta_1} = \frac{(1-0{,}05)(1-0{,}99)}{0{,}9\cdot 0{,}05 + (1-0{,}05)(1-0{,}99)} = 0{,}174.$$

   б) Вероятность того, что при тестировании всех жителей тестом **X** больной житель получит ложноотрицательный результат равна отношению таких результатов к общему числу отрицательных результатов:

$$\boldsymbol{\delta_2} = \mathbf{D}^-/(\mathbf{D}^- + \mathbf{H}^-) = \frac{\text{N}\omega(1-R)}{\text{N}\omega(1-R)\text{+SN}(1-\omega)} = \frac{\omega(1-R)}{\omega(1-R)\text{+S}(1-\omega)}$$

$$\boldsymbol{\delta_2} = \frac{0{,}05(1-0{,}9)}{0{,}05(1-0{,}9)+0{,}99(1-0{,}05)} = 0{,}005.$$

2. Среди людей, получивших положительный результат первого теста **X** (**N'** человек), доля больных составляет

$$\boldsymbol{\omega'} = 1 - \boldsymbol{\delta_1} = 1 - 0{,}174 = 0{,}826.$$

Тогда вероятность того, что при двукратном тестировании всех жителей тестом X здоровый житель дважды получит ложноположительный результат равна:

$$\boldsymbol{\delta_3} = \boldsymbol{H'^{+}}/(\boldsymbol{D'^{+}} + \boldsymbol{H'^{+}}) = \frac{\mathrm{N'}(1-\omega')(1-S)}{\mathrm{RN'}\omega' + \mathrm{N'}(1-\omega')(1-S)} = \frac{(1-\omega')(1-S)}{\mathrm{R}\omega' + (1-\omega')(1-S)}$$

$$\boldsymbol{\delta_3} = \frac{(1-0{,}826)(1-0{,}99)}{0{,}9\cdot 0{,}826+(1-0{,}826)(1-0{,}99)} = 0{,}002.$$

Таким образом, получение повторного положительного ПЦР-теста с близкой к 100% вероятностью гарантирует, что человек болен COVID-19.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 7. Поиск CRISPR в геноме *E. Coli*

Программа на языке Pascal

```
type
mas = array[1..100] of integer;

var
f: Text;
str, spr, subStr, spacer: String;
char: Char;
len, n, a, i: Longint;
sprList, spsList, spsLenList: mas;

begin
spr := '.GGTTTATCCCCGCT..CGCGGGGAAC.C';
len := length(spr);
writeln(spr, '', len);
writeln;

Assign(f, 'ecoli.txt');
Reset(f);
writeln('Position and SPR:');
{посимвольное чтение файла}
while (not Eof(f)) do {пока не достигнут конец файла}
begin
Read(f, char);
n := n + 1; {счетчик прочитанных нуклеотидов}
str := str + char; {добавляем прочитанный нуклеотид в строку}
if n >= len then
begin
if (length(str.MatchValue(spr, RegexOptions.None)) >0) then
begin
a := a + 1;
sprList[a] := n - len + 1;
write(sprList[a]);
writeln('', str);
end;
str := copy(str, 2, length(str)); {отбрасываем первый символ str, чтобы
начало строки на следующем шаге приходилось на следующий нуклеотид}
end;
end;
Close(f);
writeln();
writeln('The total number of SPR: ', a);
writeln();

{рассчет номера позиций всех спейсеров, а также их длины}
for i := 2 to a do
begin
spsList[i] := sprList[i - 1] + len; {рассчет позиции спейсера}
spsLenList[i] := sprList[i] - sprList[i - 1] - len; {рассчет длины
спейсера}
end;

spsList[12] := 0;
spsLenList[12] := 0;

Reset(f);
n := 0;
```

```
{посимвольное считывание файла с целью формирования подстроки от первого
нуклеодида первого спейсера до последнего нуклеотида последнего}
while n < (sprList[a] - 1 + len)  do {пока не достигнут конец последнего
SPR}
begin
Read(f, char);
n := n + 1;
subStr := subStr + char; {добавляем прочитанный нуклеотид в строку}
{ограничение длины считываемой подстроки}
if n > (sprList[a] - sprList[1] + len) then subStr := copy(subStr, 2,
length(subStr)); {удаление первого символа подстроки}
end;
Close(f);

writeln('Spacers:');

for i := 1 to a do
begin
if spsLenList[i] <>0 then
begin
spacer := copy(subStr, (spsList[i] - sprList[1] + 1), spsLenList[i]);
{выделяем подстроку, отвечающую спейсеру}
writeln(i, '', spsList[i], '', spacer, '', length(spacer));
end
else writeln(i, ' - - 0');
end;
end.
```

Результат работы программы (вывод на экран):

```
.GGTTTATCCCCGCT..CGCGGGGAAC.C 29

Position and SPR:
2877823 CGGTTTATCCCCGCTAACGCGGGGAACTC
2877884 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2877945 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878006 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878067 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878128 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878190 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878252 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878313 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878374 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2878435 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2904013 TGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACTC
2904074 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACAC
2904135 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACAC
2904196 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACAC
2904257 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACAC
2904318 AGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACAC
2904379 CGGTTTATCCCCGCTGGCGCGGGGAACAC

The total number of SPR: 18

Spacers:
1 - - 0
2 2877852 GTAGTCCATCATTCCACCTATGTCTGAACTCC 32
3 2877913 CCGGGGGATAATGTTTACGGTCATGCGCCCCC 32
4 2877974 TGGGCGGCTTGCCTTGCAGCCAGCTCCAGCAG 32
5 2878035 AAGCTGGCTGGCAATCTCTTTCGGGGTGAGTC 32
6 2878096 TAGTTTCCGTATCTCCGGATTTATAAAGCTGA 32
7 2878157 GCAGGCGGCGACGCGCAGGGTATGCGCGATTCG 33
8 2878219 GCGACCGCTCAGAAATTCCAGACCCGATCCAAA 33
```

```
9 2878281 TCAACATTATCAATTACAACCGACAGGGAGCC 32
10 2878342 AGCGTGTTCGGCATCACCTTTGGCTTCGGCTG 32
11 2878403 TGCGTGAGCGTATCGCCGCGCGTCTGCGAAAG 32
12 - - 0
13 2904042 GACAGAACGGCCTCAGTAGTCTCGTCAGGCTC 32
14 2904103 CTGTTTTCGCAAATCTATGGACTATTGCTATT 32
15 2904164 GGGCGCACGGAATACAAAGCCGTGTATCTGCT 32
16 2904225 TGGCTCTGCAACAGCAGCACCCATGACCACGT 32
17 2904286 GAAATGCTGGTGAGCGTTAATGCCGCAAACAC 32
18 2904347 ATTACGCCTTTTTGCGATTGCCCGGTTTTTGC 32
```

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 8. Супертетраэдр и Супертетраэдр Серпинского

1. В супертетраэдре **Tn** атомы **M** расположены в форме тетраэдра, на ребро которого приходится **n** атомов, а атомы **Y** − в форме тетраэдра, на ребро которого приходится (**n** + 1) атомов.

   а) Для **n** = 5:

$$a_T(5) = Td_5 = 35,$$

$$b_T(5) = Td_6 = 56.$$

   б) В **n**-ом поколении:

$$a_T(n) = Td_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6$$

$$\text{и } b_T(n) = Td_{n+1} = ((n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 + 2(n + 1))/6 = (n^3 + 6n^2 + 11n + 6)/6.$$

2. При переходе от поколения к поколению в **Sm**(**T2**) количество атомов **M** каждый раз увеличивается в 4 раза (исходя из принципов построения), следовательно,

$$a_S(m) = a_T(n)\cdot 4^m = a_T(2)\cdot 4^m = 4\cdot 4^m = 4^{m+1}$$

$$\text{и } a_S(3) = 256.$$

В то же время, число атомов **Y** при переходе от поколения к поколению в **Sm**, с одной стороны, увеличивается в 4 раза, а с другой – необходимо учитывать, что в точках касания супертетраэдры имеют общие атомы **Y**, по одному на каждом из ребер **Sm**:

$$b_S(1) = b_T(2)\cdot 4 – 6 = b_T(2)\cdot 4 – 6 = 34.$$

Повторяя рассуждения, получаем

$$b_S(2) = b_s(1)\cdot 4 – 6 = (b_T(2)\cdot 4 – 6)\cdot 4 – 6 = 130$$

$$b_S(3) = 514$$

…

$$b_S(m) = b_T(2)\cdot 4^m – 6\sum_0^m 4^{a-1} = b_T(2)\cdot 4^m − 6(4^m − 2)/3 = 4^m(10 − 2) + 2 = 8\cdot 4^m + 2$$

или

$$b_S(m) = 2(a_S(m)+ 1)$$

   а) $a_S(3) = 256$ и $b_S(3) = 514$

   б) $a_S(m) = 4^{m+1}$ и $b_S(m) = 8\cdot 4^m + 2$

3. Центральная полость супертетраэдра Серпинского имеет форму октаэдра – многогранника, гранями которого являются 4 («окна» на гранях супертетраэдра Серпинского) + 4 (грани «базовых» супертетраэдров, «смотрящие» во внутрь супертетраэдра Серпинского) = 8 правильных треугольников.

4. Чтобы рассчитать размер нанокластера **S2**(**T2**), необходимо найти расстояние между центрами атомов **Y**($\mathbf{d}_2$), которое связано с **d** как ребро правильного тетраэдра с радиусом описанной вокруг него сферы:

$$\mathbf{d} = \sqrt{6}\, d_2/4,$$

откуда

$$\mathbf{d_2} = 4 \cdot 0{,}24/\sqrt{6} = 0{,}39 \text{ нм}.$$

Длина ребра нанокластера **S2**(**T2**), исходя из принципа построения (число единичных тетраэдров, приходящееся на ребро супертетраэдра Серпинского, удваивается при переходе от поколения к поколению **Sm**), составляет

$$\mathbf{d_3} = 2 \cdot 2^2 \mathbf{d_2} = 3{,}12 \text{ нм}.$$

Тогда размер нанокластера как диаметр сферы, описанной вокруг тетраэдра **S2**(**T2**), равен

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{6}}{2} d_3 = 4\sqrt{6} d_2 = 3{,}82 \text{ нм}.$$

Длина ребра октаэдра, являющегося внутренней полостью **S2**(**T2**), равна (исходя из принципа построения) длине ребра нанокластера **S2**(**T1**)

$$\mathbf{d_4} = 2 \cdot 2^1 \mathbf{d_2} = 1{,}56 \text{ нм}.$$

Тогда максимальный диаметр сферической частицы, которая поместится в полости нанокластера **S2**(**T2**), равен диаметру сферы, вписанной в октаэдр с ребром $\mathbf{d_4}$, и составляет

$$\mathbf{D_o} = \frac{\sqrt{6}}{3} d_4 = 1{,}27 \text{ нм}.$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Поиск простейших ПМК с шестиугольными и треугольными гранями

1. Исходя из двух условий: в каждой вершине многогранника сходятся не менее трех ребер и каждая вершина имеет не более пяти соседей (шесть соседей дают плоское окружение), следует, что возможны два типа вершин:
   - в вершине сходятся 3 ребра: 3 соседа (три треугольника), 4 соседа (два треугольника и шестиугольник), 5 соседей (треугольник и два шестиугольника);
   - в вершине сходятся 4 ребра: 4 соседа (четыре треугольника), 5 соседей (три треугольника и шестиугольник).
2.
   а) Для **y** = 3:

   Выразим число вершин через число граней (каждая треугольная (шестиугольная) грань дает 3 (6) вершин, но каждая вершина принадлежит трем граням):

$$\mathbf{V} = 3/3\mathbf{F}_3 + 6/3\mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_3 + 2\mathbf{F}_6$$

   Выразим число ребер через число граней (каждая треугольная (шестиугольная) грань дает 3 (6) ребер, но каждое ребро принадлежит двум граням):

$$\mathbf{E} = 3/2\mathbf{F}_3 + 6/2\mathbf{F}_6 = 1{,}5\mathbf{F}_3 + 3\mathbf{F}_6$$

   Запишем теорему Эйлера:

$$\mathbf{F}_3 + 2\mathbf{F}_6 – 1{,}5\mathbf{F}_3 – 3\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_6 = 2$$

   Преобразуя, получаем:

$$0{,}5\mathbf{F}_3 = 2$$

   То есть, число треугольников $\underline{\mathbf{F}_3 = 4}$ - фиксировано, $\mathbf{F}_6$ может быть любым.

   б) Аналогично, для **y** = 4 (в каждой вершине сходится по 4 ребра):

$$\mathbf{V} = 3/4\mathbf{F}_3 + 6/4\mathbf{F}_6 = 0{,}75\mathbf{F}_3 + 1{,}5\mathbf{F}_6$$

$$\mathbf{E} = 3/2\mathbf{F}_3 + 6/2\mathbf{F}_6 = 1{,}5\mathbf{F}_3 + 3\mathbf{F}_6$$

   Запишем теорему Эйлера:

$$0{,}75\mathbf{F}_3 + 1{,}5\mathbf{F}_6 – 1{,}5\mathbf{F}_3 – 3\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_6 = 2$$

   Преобразуя, получаем:

$$0{,}25\mathbf{F}_3 – 0{,}5\mathbf{F}_6 = 2$$

   Следовательно, количества треугольников шестиугольников связаны как

$$\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{F}_6 + 8.$$

Поскольку теорема Эйлера ничего не говорит о существовании многогранника, то, чтобы найти многогранник **Xy** с минимальным числом вершин, для каждого **y** проварьируем число шестиугольников и проверим возможность построения каждого из получаемых многогранников в виде ПМК без искажения треугольных и шестиугольных граней.

а) Для **y** = 3:

F$_3$ = 4

F$_6$ = 1, **V** = 6, **E** = 9 – многогранник не существует, поскольку все 6 вершин и 6 из 9 ребер уже принадлежат шестиугольнику, а еще где-то необходимо разместить 4 треугольных грани и 3 не принадлежащих шестиугольнику ребра.

F$_6$ = 2, **V** = 8, **E** = 12 – из развертки, отвечающей данному набору (**F**$_3$, **F**$_6$, **V**, **E**) и представленной на рис. 1, можно «склеить» только выпуклый многогранник, грани которого представляют собой правильные треугольники и трапеции (половинки правильных шестиугольников). То есть, удовлетворяющий условию многогранник не существует.

F$_6$ = 3, **V** = 10, **E** = 15 – из развертки, отвечающей данному набору (**F**$_3$, **F**$_6$, **V**, **E**) и представленной на рис. 2, можно «склеить» только выпуклый многогранник, грани которого представляют собой не только правильные, но и равнобедренные треугольники, а также прямоугольники, сформированные при отрезании от правильных шестиугольников равнобедренных треугольников по малым диагоналям. То есть, удовлетворяющий условию многогранник не существует.

F$_6$ = 4, **V** = 12, **E** = 18. **X**$_3$ – усеченный тетраэдр. См. рис. 3.

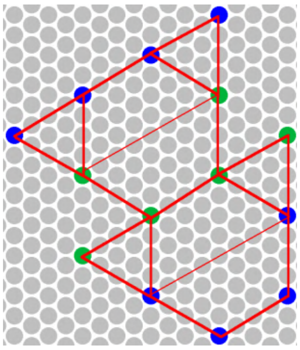


Рис. 1.

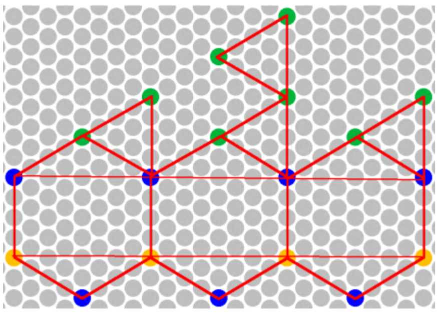


Рис. 2.

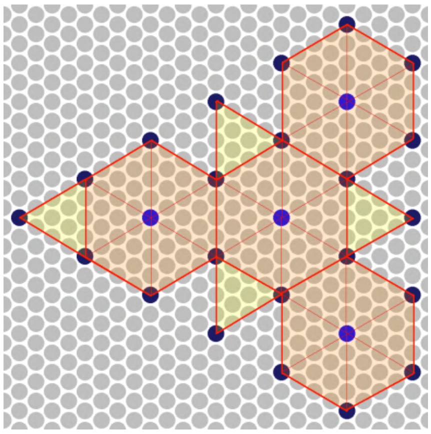


Рис. 3.

б) Для **y** = 4:

F$_6$ = 1, **F**$_3$ = 10, **V** = 9, **E** = 18 – из развертки, отвечающей данному набору (**F**$_3$, **F**$_6$, **V**, **E**) и представленной на рис. 4, невозможно «склеить» многогранник с 9-ю вершинами, в каждой из которых по сходятся по 4 ребра (только сочетание из 3, 4 и 5 ребер в вершинах). Кроме того, данную развертку невозможно «склеить» без искажения либо формы треугольников, либо планарности шестиугольника. То есть, удовлетворяющий условию многогранник не существует.

F$_6$ = 2, **F**$_3$ = 12, **V** = 12, **E** = 24. **X**$_4$ – шестиугольная антипризма. См. рис. 5.

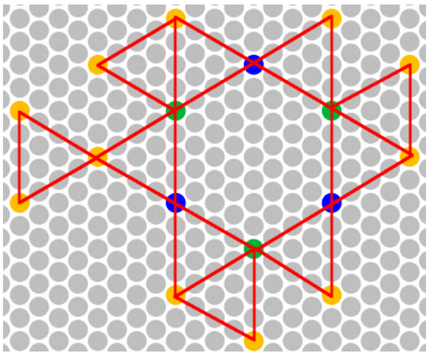


Рис. 4.

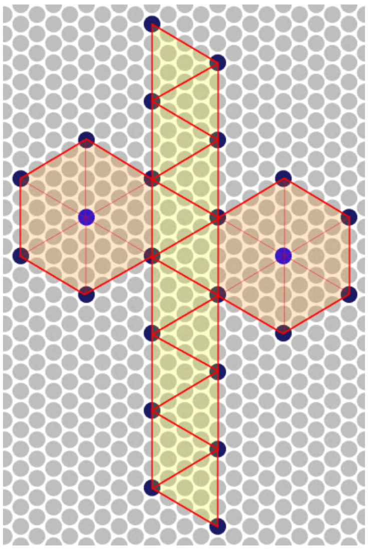


Рис. 5.

3. Представим всю поверхность ПМК как совокупность равносторонних треугольников, то есть каждую шестиугольную грань условно разобьем на 6 треугольников, сходящихся в одной «псевдовершине». Тогда суммарное число треугольных и таких «псевдотреугольных» граней будет равно

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6},$$

суммарное число ребер и «псевдоребер» равно

$$\mathbf{E'} = \mathbf{E} + 6\mathbf{F_6} = 1{,}5\mathbf{F}_3 + 3\mathbf{F}_6 + 6\mathbf{F_6} = 1{,}5(\mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6}) = 1{,}5\mathbf{F'},$$

а суммарное число вершин и «псевдовершин» (из теоремы Эйлера для выпуклых многогранников) составляет

$$\mathbf{V'} = 2 - \mathbf{F'} + \mathbf{E'} = 0{,}5\mathbf{F'} + 2.$$

Если на одно ребро треугольной грани ПМК приходится **n** атомов металла, то на одну треугольную грань приходится

$$0{,}5\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1) \text{ атомов.}$$

Тогда общее число атомов в ПМК можно будет записать как число атомов в **F’** гранях минус число атомов в **E’** ребрах плюс число атомов в **V’** вершинах

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 0{,}5\mathbf{F'n}(\mathbf{n} + 1) - 1{,}5\mathbf{F'n} + 0{,}5\mathbf{F'} + 2,$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 0{,}5\mathbf{F'n}^2 - \mathbf{F'n} + 0{,}5\mathbf{F'} + 2.$$

а) Тогда для $\mathbf{X}_3$ – усеченного тетраэдра

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6} = 4 + 6\cdot 4 = 28,$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 14\mathbf{n}^2 - 28\mathbf{n} + 16,$$

$$\mathbf{N}(2) = 16.$$

б) Для $\mathbf{X}_4$ – шестиугольной антипризмы

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6} = 12 + 2\cdot 6 = 24,$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 12\mathbf{n}^2 - 24\mathbf{n} + 14,$$

$$\mathbf{N}(2) = 14.$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 10. Биметаллический кубооктаэдр

1. В центре $\mathbf{A_xB_y}$ находится атом **B**.

   а) В слое с $\mathbf{n} = 5$ атомы **B** расположены:

   - в каждой из 12-ти вершин кубооктаэдра с ребром 5,
   - по 1 на каждом из 24-х ребер (атомы в вершинах не считаем, они уже посчитаны),
   - по 1 на каждой из 6-ти квадратных граней.

   Всего 12 + 24 + 6 = 42 атома **B**.

   б) Поскольку пример, представленный на рисунке 1б, отвечает слою, в котором на ребро приходится $5 = 2{\cdot}2 + 1 = 2\mathbf{k} + 1 (k \in \mathbb{N})$ − нечетное число атомов, то в слоях, на ребро которых приходится $2\mathbf{k}$ атомов, **B** нет, поскольку любой из атомов этого слоя будет касаться хотя бы одного из атомов **B** соседнего слоя (выше или ниже лежащего).

   Следовательно, в поверхностном слое, на ребро которого приходится $2\mathbf{k}$ атомов, атомов **B** также нет, а в центре любого нанокластера $\mathbf{A_xB_y}$ находится атом **B**.

   в) На любую квадратную грань слоя, на ребро которого приходится $2\mathbf{k} + 1$ атомов, приходится $\mathbf{n}^2 = (2\mathbf{k} + 1)^2$ атомов, из них $(\mathbf{k} + 1)^2$ атомов − это атомы **B**, на любую треугольную его грань − $\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1)/2$, из которых $(\mathbf{k} + 1)(\mathbf{k} + 2)/2$ являются **B**, соответственно.

   Найдем зависимость числа атомов в поверхностном слое кубооктаэдра от числа атомов, приходящихся на его ребро:

$$\mathbf{M}(\mathbf{n}) = \mathbf{N}(\mathbf{n}) - \mathbf{N}(\mathbf{n} - 1)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{n}) = (10\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} - 3)/3 - (10(\mathbf{n} - 1)^3 - 15(\mathbf{n} - 1)^2 + 11(\mathbf{n} - 1) - 3)/3$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{n}) = (10\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} - 3)/3 - (10(\mathbf{n}^3 - 3n^2 + 3\mathbf{n} - 1) - 15(\mathbf{n}^2 - 2\mathbf{n} + 1) + 11(\mathbf{n} - 1) - 3)/3$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{n}) = (30n^2 - 60\mathbf{n} + 36)/3$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{n}) = 10\mathbf{n}^2 - 20\mathbf{n} + 12.$$

   Необходимо отметить, что полученная формула справедлива только для $\mathbf{n} \geq 2$.

   То есть, если весь слой, на ребро которого приходится $2\mathbf{k} + 1$ атомов, состоит из

$$\mathbf{M}_{\mathbf{all}}(2\mathbf{k} + 1) = 10(2\mathbf{k} + 1)^2 - 20(2\mathbf{k} + 1) + 12 = 40\mathbf{k}^2 + 2 \text{ атомов,}$$

   то из них

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{k} + 1) = 10(\mathbf{k} + 1)^2 - 20(\mathbf{k} + 1) + 12 = 10\mathbf{k}^2 + 2$$

   будут атомами **B**.

2.

а) В слое с **n** = 5 общее число атомов в поверхностном слое равно

$$\mathbf{M}_{\mathrm{all}}(5) = \mathbf{N}_{\mathrm{all}}(5) - \mathbf{N}_{\mathrm{all}}(4) = 309 - 147 = 162,$$

число атомов **B**

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}}(3) = \mathbf{N}_{\mathrm{B}}(3) - \mathbf{N}_{\mathrm{B}}(2) = 55 - 13 = 42,$$

то есть, доля атомов **B** составляет

$$\boldsymbol{\delta}(5) = 42/162 = 0{,}259.$$

б) В слое с **n** = 2**k** доля атомов **B** составляет **δ** = 0.

В слое с **n** = 2**k** + 1

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{M}_{\mathrm{B}}(\mathbf{k} + 1)/\mathbf{M}_{\mathrm{all}}(2\mathbf{k} + 1)$$

$$\boldsymbol{\delta} = (10\mathbf{k}^2 + 2)/(40\mathbf{k}^2 + 2) = (5\mathbf{k}^2 + 1)/(20\mathbf{k}^2 + 1)$$

Или, выражая через **n**,

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{M}_{\mathrm{B}}(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5)/\mathbf{M}_{\mathrm{all}}(\mathbf{n})$$

$$\boldsymbol{\delta} = (10(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5)^2 - 20(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5) + 12)/(10\mathbf{n}^2 - 20\mathbf{n} + 12)$$

$$\boldsymbol{\delta} = (2{,}5\mathbf{n}^2 - 5\mathbf{n} + 4{,}5)/(10\mathbf{n}^2 - 20\mathbf{n} + 12).$$

в) В слое с **n** = 2**k** при **n** →∞ $\lim\limits_{n\to\infty} \delta = 0$.

В слое с **n** = 2**k** + 1

$$\boldsymbol{\delta} = \lim_{k\to\infty} \frac{5k^2 + 1}{20k^2 + 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{5 + 1/k^2}{20 + 1/k^2} = 0{,}25.$$

или

$$\boldsymbol{\delta} = \lim_{n\to\infty} \frac{2{,}5n^2 - 5n + 4{,}5}{10n^2 - 20n + 12} = \lim_{n\to\infty} \frac{2{,}5 - 5/n + 4{,}5/n^2}{10 - 20/n + 12/n^2} = 0{,}25.$$

3.

а) В кластере с **n** = 5

y = 1 (центральный атом) + 12 (слой с **n** = 3) + 42 (слой с **n** = 5) = 55,

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_{\mathrm{all}}(5) - \mathbf{y} = 309 - 55 = 254,$$

тогда

$$\mathbf{y}:\mathbf{x} = 55:254 \approx 0{,}216.$$

б) В кластере, на ребро которого приходится **n** атомов, рассмотрим два возможных случая.

В кластере с **n** = 2**k** + 1 атомы **B** формируют кубооктаэдр с ребром, на которое приходится 0,5**n** + 0,5 атомов:

$\mathbf{y} = 1 + \sum_{m=2}^{(n+1)/2} M(m) = \mathbf{N_B}(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5)$,

$\mathbf{y} = (10(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5)^3 - 15(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5)^2 + 11(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5) - 3)/3$,

$\mathbf{y} = (1{,}25\mathbf{n}^3 + 1{,}75\mathbf{n})/3$.

Тогда атомов **A** в таком кластере

$\mathbf{x} = \mathbf{N_{all}}(\mathbf{n}) - \mathbf{N_B}(0{,}5\mathbf{n} + 0{,}5)$,

$\mathbf{x} = (10\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} - 3)/3 - (1{,}25\mathbf{n}^3 + 1{,}75\mathbf{n})/3$,

$\mathbf{x} = (8{,}75\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 9{,}25\mathbf{n} - 3)/3$,

и соотношение равно

$\mathbf{y}:\mathbf{x} = \{(1{,}25\mathbf{n}^3 + 1{,}75\mathbf{n})/3\}:\{(8{,}75\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 9{,}25\mathbf{n} - 3)/3\}$

$\mathbf{y}:\mathbf{x} = (1{,}25\mathbf{n}^3 + 1{,}75\mathbf{n})/(8{,}75\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 9{,}25\mathbf{n} - 3)$

$\mathbf{y}:\mathbf{x} = (5\mathbf{n}^3 + 7\mathbf{n})/(35\mathbf{n}^3 - 60\mathbf{n}^2 + 37\mathbf{n} - 12)$

В кластере с $\mathbf{n} = 2\mathbf{k}$ атомы **B** формируют кубооктаэдр с ребром, на которое приходится $0{,}5\mathbf{n}$ атомов

$\mathbf{y} = 1 + \sum_{m=2}^{n/2} M(m) = \mathbf{N_B}(0{,}5\mathbf{n})$,

$\mathbf{y} = (10(0{,}5\mathbf{n})^3 - 15(0{,}5\mathbf{n})^2 + 11\cdot 0{,}5\mathbf{n} - 3)/3$,

$\mathbf{y} = (1{,}25\mathbf{n}^3 - 3{,}75\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n} - 3)/3$.

Тогда атомов **A** в таком кластере

$\mathbf{x} = \mathbf{N_{all}}(\mathbf{n}) - \mathbf{N_B}(0{,}5\mathbf{n})$,

$\mathbf{x} = (10\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} - 3)/3 - (1{,}25\mathbf{n}^3 - 3{,}75\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n} - 3)/3$,

$\mathbf{x} = (8{,}75\mathbf{n}^3 - 11{,}25\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n})/3$,

и соотношение равно

$\mathbf{y}:\mathbf{x} = \{(1{,}25\mathbf{n}^3 - 3{,}75\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n} - 3)/3\}:\{(8{,}75\mathbf{n}^3 - 11{,}25\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n})/3\}$

$\mathbf{y}:\mathbf{x} = (1{,}25\mathbf{n}^3 - 3{,}75\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n} - 3)/(8{,}75\mathbf{n}^3 - 11{,}25\mathbf{n}^2 + 5{,}5\mathbf{n})$

$\mathbf{y}:\mathbf{x} = (5\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 22\mathbf{n} - 12)/(35\mathbf{n}^3 - 45\mathbf{n}^2 + 22\mathbf{n})$

в) В случае $\mathbf{n} = 2\mathbf{k}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^3 - 15n^2 + 22n - 12}{35n^3 - 45n^2 + 22n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5 - 15/n + 22/n^2 - 12/n^3}{35 - 45/n + 22/n^2} = 1/7 \approx 0{,}143.$$

В случае $\mathbf{n} = 2\mathbf{k} + 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^3 + 7n}{35n^3 - 60n^2 + 37n - 12} = \lim_{n\to\infty}\frac{5 + 7/n^2}{35 - 60/n + 37/n^2 - 12/n^3} = 1/7 \approx 0{,}143.$$