



**Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)**  
**Простые задачи. Решения**

**Решение задачи 1. Библиотека в кармане (10 баллов)**

1. Площадь микросхемы карты памяти составляет половину от площади ее корпуса:

$$S = 0,5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2,$$

$$S = 7,5 \cdot 10^{13} \text{ нм}^2.$$

Поскольку объем карты памяти составляет 1 Терабайт = 8 Терабит и запись ведется в 100 слоев (то есть, площадь, занимаемая информацией, в 100 раз больше площади микросхемы), то на один бит карты памяти приходится:

$$S_1 = 100 \cdot 7,5 \cdot 10^{13} / (1,1 \cdot 10^{12}) / 8 = 8,52 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2 \approx 850 \text{ нм}^2.$$

2. Емкость карты памяти должна увеличиться в

$$4,50 \cdot 10^{15} / 1,1 \cdot 10^{12} = 4096 \text{ раз.}$$

Поскольку, по закону Мура, емкость карты памяти должна удваиваться каждые два года, то увеличение в 4096 раз произойдет через

$$t = 2 \cdot \log_2(4096) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ года}$$

после представления карты памяти объемом 1 Тб в 2019 году, то есть, в 2043 году.

(Или: нужно 4096 делить на 2 до тех пор, пока остаток от деления будет больше или сравним с единицей, всего удваивание происходит 12 раз.)

**Решение задачи 2. Изучаем дендример (10 баллов)**

1. Общее число мономерных звеньев (без учета центрального звена) в дендримере с коэффициентом ветвления, равным 2, и  $n$  поколениями ветвления можно записать как сумму геометрической прогрессии, в которой первый член ряда равен 3, а знаменатель равен 2:

$$S' = 3 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \sum_{m=1}^n 2^{m-1} = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 2^n - 3.$$

Или, учитывая центральное звено:  $S = S' + 1 = 3 \cdot 2^n - 2$ .

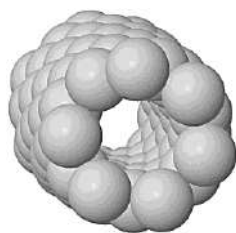
То есть, по условию,  $S = 3 \cdot 2^n - 2 = 94$ .

Тогда число поколений ветвления равно

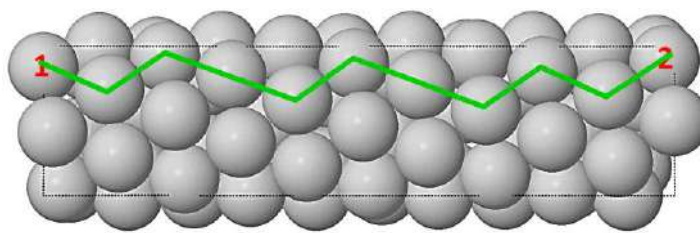
$$n = \log_2 \left( \frac{S+2}{3} \right) = \log_2 \left( \frac{96}{3} \right) = \log_2(32) = 5.$$

2. Радиус молекулы дендримера составляет  $R \approx nL$ , а диаметр  $D = 2nL = 2 \cdot 5 \cdot 1,5 = 15 \text{ нм}$ .

### Решение задачи 3. Металлическая спираль (10 баллов)



а



б

По виду трубки с торца видим, что каждый виток имеет длину более 6, но менее 7 межатомных расстояний. Таким образом, если взять произвольный атом в цепочке и два его ближайших соседа на соседнем витке спирали, то до соседа, расположенного на рис. б «сверху» будет 6 межатомных расстояний по цепочке, а до соседа «снизу» – 7.

Будем идти из атома 1 по центрам ближайших атомов соседних витков, смещаясь «вверх» или «вниз», и соответственно засчитывая 6 или 7 межатомных расстояний, пока не окажемся на атоме 2. В итоге суммарно получим  $7 + 6 + 7 + 7 + 6 + 7 + 7 + 6 + 7 + 6 = 66$  межатомных расстояний для пути, отмеченного на рисунке.

Поскольку в цепочке атомов на одно межатомное расстояние приходится 1 атом, и по рисунку атомы 1 и 2 разделяет 10 полных (поскольку атомы связаны параллельным переносом вдоль оси спирали) витков спирали, то число атомов  $x$ , приходящееся на виток спирали, составит  $66/10 = 6,6$ .

Цепочка от атома 1 до атома 2 содержит 66 межатомных расстояний и состоит из  $66 + 1 = 67$  атомов. Общее число атомов в трубке, согласно рисунку, на один атом больше и составляет  $n = 68$  атомов.

### Решение задачи 4. Полипептид (10 баллов)

Число вариантов структуры полипептида ( $N$ ), составленного из семи аминокислотных остатков (а/о) глицина, и трех а/о, являющихся лейцином ( $L$ ) и/или аланином ( $A$ ), равно сумме вариантов размещения 3 а/о в цепочке длиной  $7 + 3 = 10$  а/о для четырех возможных комбинаций  $L$  и  $A$ :

$$3L + 0A, 2L + 1A, 1L + 2A \text{ и } 0L + 3A,$$

$$N = N_{3L} + N_{2L+A} + N_{2A+L} + N_{3A}.$$

Рассчитаем  $N$  для каждой из комбинаций  $L$  и  $A$ . Число вариантов размещения 3 а/о одного типа относительно 7 а/о другого типа в цепочке длиной 10 а/о составляет:

$$N_{3L+0A} = N_{0L+3A} = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120.$$

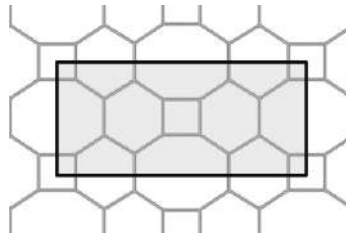
Число вариантов размещения 1 а/о одного типа и 2 а/о второго типа относительно 7 а/о третьего типа в цепочке длиной 10 а/о составляет:

$$N_{2L+1A} = N_{1L+2A} = C_{10}^1 \cdot C_9^2 = 10 \frac{9!}{2!7!} = 10 \frac{9 \cdot 8}{2} = 360.$$

Тогда общее число вариантов структуры полипептида равно

$$N = 2 \cdot N_{3Л} + 2 \cdot N_{2Л+А} = 2 \cdot 120 + 2 \cdot 360 = 960.$$

### Решение задачи 5. Двумерные ячейки (10 баллов)



1. На ячейку приходятся:

- 16 вершин (**V**),
- $12 \cdot 0,5 + 18 = \underline{24}$  ребра (**E**),
- $4 \cdot 0,25 + 1 = 2$  квадрата,
- $4 \cdot 0,5 + 2 = 4$  шестиугольника,
- $4 \cdot 0,5 = 2$  восьмиугольника,
- то есть, всего  $2 + 4 + 2 = \underline{8}$  многоугольников (**F**).

Тогда значение **k** для периодических двумерных структур равно

$$k = 16 - 24 + 8 = 0.$$

2. Общее число граней, приходящееся на ячейку периодической двумерной структуры:

$$F = F_5 + F_6 + F_7.$$

Общее число ребер, приходящееся на ячейку:

$$E = 1/2 \cdot (5F_5 + 6F_6 + 7F_7).$$

Общее число вершин, приходящееся на ячейку:

$$V = 1/3 \cdot (5F_5 + 6F_6 + 7F_7).$$

Тогда, подставляя полученные выражения и  $k = 0$  в формулу  $V - E + F = k$  для ячейки, получаем:

$$1/3 \cdot (5F_5 + 6F_6 + 7F_7) - 1/2 \cdot (5F_5 + 6F_6 + 7F_7) + F_5 + F_6 + F_7 = 0$$

Следовательно, общее уравнение, связывающее число многоугольников разного типа, приходящееся на ячейку, это:

$$F_5 - F_7 = 0$$

$$F_5 = F_7$$

(то есть, число шестиугольников может быть любым, а число пятиугольников равно числу семиугольников).

Если  $F_6 = 6$  и  $F_5 = 2$ , то  $F_7 = F_5 = 2$ .