



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 1. Геометрия радиолярий

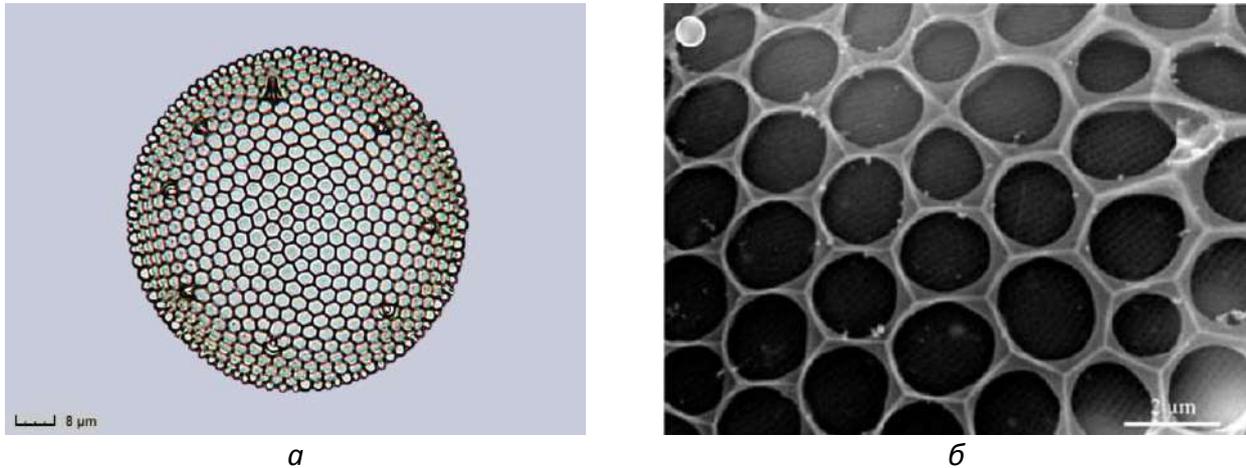


Рис. 1. Примеры радиолярий рода *Stephanoruxis*. а) Внешний вид. б) Изображение скелета, полученное при помощи сканирующей электронной микроскопии.

Радиолярии – это простейшие одноклеточные организмы, входящие в состав планктона. Они имеют ажурный внутренний скелет (рис. 1), который в ряде случаев состоит из наночастиц диоксида кремния размером 50 – 150 нм.

1. В структуре выпуклого многогранника, отвечающего внутреннему скелету некоторого экземпляра радиолярии *Stephanoruxis*, существуют только пяти-, шести- и семиугольники, а в каждой вершине сходятся ровно по три грани. Оцените общее число граней для этого скелета, если его форма близка к сферической, диаметр составляет  $D = 43,13$  мкм, а длина любого ребра –  $d = 1,5$  мкм. **(2.5 балла)**
2. Воспользовавшись теоремой Эйлера<sup>1</sup>, рассчитайте число пяти-, шести- и семиугольных граней во внутреннем скелете радиолярии рода *Stephanoruxis*, если доля семиугольников для него составляет  $\delta = 15\%$  от общего числа граней. **(3.5 балла)**

<sup>1</sup>Теорема Эйлера для выпуклого многогранника:  $V - E + F = 2$ , где  $V$ ,  $E$ ,  $F$  – это, соответственно, число вершин, ребер и граней.

**Всего – 6 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 2. Мутации: и целого мира мало

Молекула фермента **X** представляет собой некоторую известную последовательность длиной в 37 аминокислотных остатков (АО)<sup>1</sup>. Предположим, что существуют такие мутации, которые приводят к замене произвольного АО в **X** на другой случайный АО.

1. Сколько разных по структуре молекул может быть получено в результате единичной мутации в **X**? **(1 балл)**
2. Сколько всего разных по структуре молекул можно получить в результате неограниченного числа последовательных мутаций в **X**? **(3 балла)**
3. Рассчитайте диаметр сферы, внутри которой можно разместить все молекулы из п.2, если на один АО в среднем приходится объем, равный  $0,14 \text{ нм}^3$ . **(2 балла)**

<sup>1</sup> Последовательность АО в полипептиде имеет направление (начало и конец). В рамках задачи считать, что в состав таких молекул могут входить только стандартные 20 АО.

**Всего – 6 баллов**



**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**  
**Задача 3. Аэрогель**



Аэрогелями называют класс аморфных высокопористых материалов, имеющих объемную макроструктуру с характерным размером наноструктурных элементов 4 – 10 нм и представляющих собой гель, в котором жидкая фаза полностью замещена газообразной.

1. Рассчитайте истинную плотность<sup>1</sup> твердой фазы  $\rho_x$  и объемную долю  $\omega$  (%) воздуха в структуре аэрогеля **(2.5 балла)**, если известно, что:
  - аэрогель имеет удельную<sup>2</sup> площадь поверхности, равную  $S_{уд} = 343 \text{ м}^2/\text{г}$ ;
  - структура твердой фазы представляет собой совокупность бесконечно длинных цилиндров радиуса  $r = 2,2 \text{ нм}$ ;
  - кажущаяся<sup>3</sup> плотность аэрогеля  $\rho_{ag}$  превышает плотность воздуха в  $\phi = 66$  раз.

Какой из перечисленных ниже материалов был использован для создания аэрогеля?  
**(0.5 балла)**

углеродное волокно	диоксид титана	диоксид кремния	оксид алюминия	воздух
1,5 г/см <sup>3</sup>	4,23 г/см <sup>3</sup>	2,65 г/см <sup>3</sup>	3,95 г/см <sup>3</sup>	1,2 мг/см <sup>3</sup>

2. Оцените среднее расстояние между отдельными цилиндрами твердой фазы.  
**(2 балла)**

<sup>1</sup> Истинная плотность – это масса единичного объема сплошного материала без пор, полостей и включений.

<sup>2</sup> Удельная величина – это величина, отнесенная к единице массы образца.

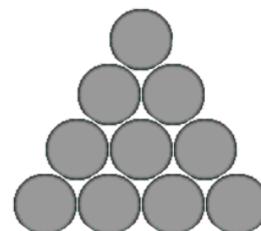
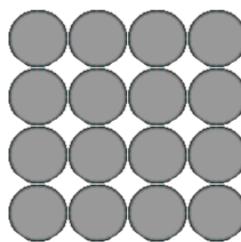
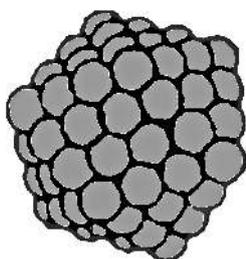
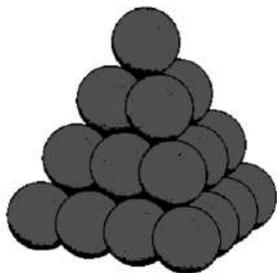
<sup>3</sup> Кажущаяся (средняя) плотность – это масса единичного объема материала с учетом пор, полостей и включений.

**Всего – 5 баллов**



**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**

**Задача 4. Ребус**



*a*

$$Td_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6$$

*б*

$$I_n = (10n^3 - 15n^2 + 11n - 3)/3$$

*в*

$$S_n = n^2$$

*г*

$$T_n = n(n + 1)/2$$

*Рис. Примеры моделей: а) тетраэдрического  $Td_4$ , б) икосаэдрического  $I_4$ , в) квадратного  $S_4$ , г) треугольного  $T_4$  нанокластеров, на ребро каждой из которых приходится  $n = 4$  шарика.*

*Для каждой из моделей приведена общая формула зависимости числа шариков в нанокластере от  $n$ .*

Три школьника получили одинаковые наборы шариков и задание: сложить из них без остатка по две двух- или трехмерные модели нанокластеров так, чтобы число шариков, приходящихся на ребро одного из них, было кратно трем. Все школьники справились с заданием, результат их работы представлен в таблице.

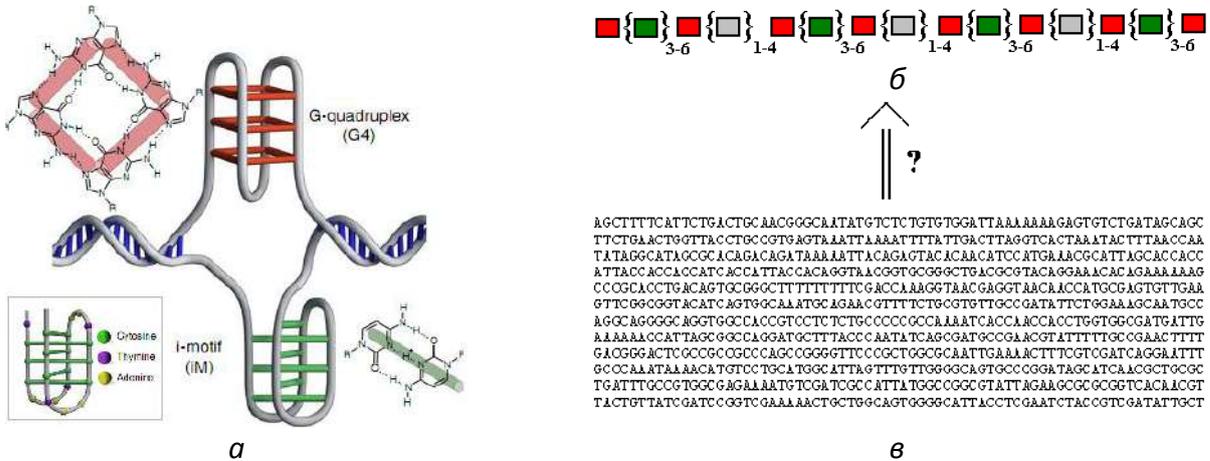
Школьник	Модель 1	Тип	$n_1$	Модель 2	Тип	$n_2$
1. Петя	$Td_{3k}$	тетраэдр	$3k$	$I_{k+1}$	икосаэдр	$k + 1$
2. Вася	$S_{3k}$	квадрат	$3k$	$S_{6k-1}$	квадрат	$6k - 1$
3. Коля	$T_{3k}$	треугольник	$3k$	$T_x$	треугольник	$x$

1. Каково общее число шариков, выданных школьникам? **(2 балла)**
2. Сколько шариков приходится на ребро большего треугольника? **(2 балла)**
3. Сколько шариков в каждой из моделей, построенных школьниками? **(2 балла)**

**Всего – 6 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур) Задача 5. Поиск наномотивов в ДНК *E. Coli*



```

AGCTTTTCATTTCTGACTGCAACGGGCAATATGTCCTCTGTGTGGATTAAA AAAAGAGTGCTGTGATGCAGC
TTCTGAACTGTTACCTGCGTGAAGTAAATTA AAAATTTTATTGACTTATAGTCACTAAATACCTTTAAACCAA
TATAGGCATAGCGGACAGACAGATAAAAATTTACAGACTACACAACTCCATGAAAGCGCATTAGCACACCC
ATTACCACCCATCACCATTACACAGGTAACGGTGGGGCTGACCGGTACAGGAAACACAGAAA AAG
CCCGCACTGACAGTGGGGCTTTTTTTCGACCAAAAGGTAACGAGGTAAACAACCA TGGCAGTGTGAA
GTTCGGCGGTACATCAGTGGCAATGCAAGAACGTTTCTGCGTGTTCGGGATA TTCTGGAAAGCAA TGCC
AGGCAGGGGCAGGTGGCCACCGTCTCTCTGCCCCGCCAAAATCACCACCACTGTTGGGATGATTG
AAAAAACCATTAGCGGCCAGGATGCTTTACCCAAATATCAGCGATGCCGACCGTATTTTGGCGAAC TTT
GACGGGACTCGCCGCGCCAGCGGGGTTCCCGCTGGCGCAATTGAAAACCTTTTCGTGATCAGGAATT
GCCCAAATAAACAATGTCCTGCAATGCCATTAATTGTTGGGCAATGCCCGGATAGCATCACCGTCCGC
TGATTTGGCGTGGCAGAAAATGTGATCGCCATTA TGGCGCGGTATTAGAAAGCGCGCGGTACAAACGT
TACTGTATCGATCCGTCGAAA AACTGCTGCGCAGTGGGGCATTACCTCGAATCTACCGTGAATATGCT
    
```

Рис. 1. а) Наномотивы – неканонические фрагменты структуры ДНК (пояснения см. в тексте задачи). б) Общий шаблон последовательности, отвечающей наномотивам в тексте генома. Здесь: зеленый квадрат отвечает букве **G** для **G**-квадруплексов и **C** для **i**-мотивов, красный квадрат – любой букве кроме **G** и **C**, соответственно, серый – любой из четырех букв. в) Начало файла<sup>2</sup> генома штамма K-12 *E. Coli*, открытого в текстовом редакторе.

Единичные нити ДНК<sup>1</sup> с определенным расположением гуанина **G**, способны самопроизвольно сворачиваться в четырехцепочечные спирали – **G-квадруплексы** (рис. 1а), которые обладают повышенной устойчивостью. При этом четыре нуклеотида **G** из разных цепей образуют плоскую структуру, называемую **G-квартетом**. В свою очередь, комплементарные<sup>1</sup> им цепочки, богатые цитозином **C**, также могут образовывать трехмерные ДНК-структуры – **i-мотивы (i-motif)**, в которых нуклеотиды **C** соединены попарно, как показано на рисунке 1а. В начале 2018 года ученым удалось не только впервые зафиксировать **i-мотивы in vivo**, но и исследовать их функции в ядре человеческой клетки. Оказалось, что оба типа структурных наномотивов выполняют регуляторную функцию (входят в состав теломеров и промоторов) и широко представлены во всех известных геномах.

Напишите программу (на любом языке программирования), которая позволит найти, сколько всего **G-квадруплексов** и **i-мотивов**, соответствующих шаблону (рис. 1б), находится в тексте генома<sup>2</sup> *E. Coli* (рис. 1в). В ответе приведите исходный код программы, а также сами нуклеотидные последовательности и позиции их начала (номер по порядку в геноме) для каждого найденного наномотива.

*Подсказка: в программе для упрощения процедуры поиска наномотивов можно использовать регулярные выражения.*

<sup>1</sup> Наследственная информация в молекуле ДНК хранится в виде текста, записанного всего четырьмя буквами – **A, G, T, C**. Каждой букве из одной ДНК цепочки соответствует строго определенная (комплементарная: **A** напротив **T**, **C** напротив **G**, а также наоборот) буква второй цепочки. Поэтому для описания генома достаточно записать буквами только одну из

них, что и сделано в скачиваемом вами файле, поэтому число пар оснований равно числу символов нуклеотидов в этом файле.

<sup>2</sup> Бактерия *E. Coli* (кишечная палочка) является одним из удобных модельных организмов в биологии, а геном ее лабораторного штамма K-12 был расшифрован одним из первых. Для выполнения этого задания сохраните по указанной ссылке с сайта олимпиады <http://enanos.nanometer.ru/uploads/archive/ecoli.zip> архив файла (~1.3 Мб) генома штамма K-12 *E. Coli*, который состоит из одной непрерывной строки, содержащей только буквы **A, G, T, C**.

**Всего – 8 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 6. Нетипичный симметричный фуллерен

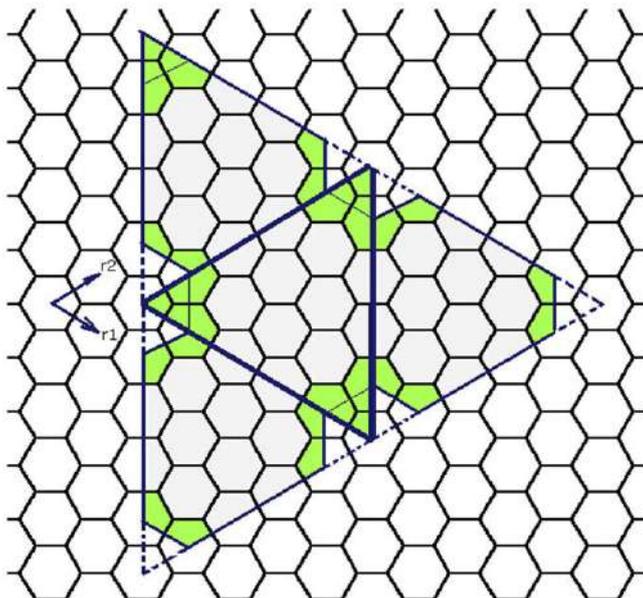


Рис. 1. Пример развертки одного из типов симметричных неикосаэдрических фуллеренов  $C_N$  на графеновой плоскости (здесь  $N$  – число атомов в молекуле). Пятиугольники на развертке залиты зеленым цветом. На рис. также приведены единичные вектора  $r_1$  и  $r_2$ , задающие косоугольную систему координат.

Рассмотрим развертку некоторого типа симметричных фуллеренов, все пятиугольники в котором разбиты на группы по три, имеющие одну общую вершину. При этом края развертки перпендикулярны связям С–С (рис. 1).

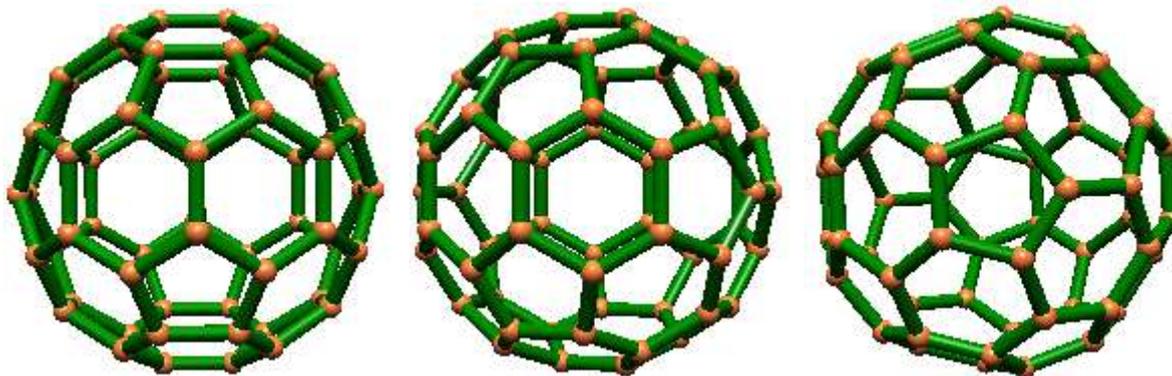
1. Рассчитайте величину  $N$  для фуллерена, представленного на рисунке 1. **(1.5 балла)**
2. Симметрией какого многогранника обладает такой тип фуллеренов? **(1.5 балла)**
3. Какое минимальное число целочисленных параметров задает развертку фуллерена такого типа в косоугольной системе координат? **(2 балла)**
4. В общем виде выведите зависимость числа атомов  $N$  фуллерене рассматриваемого типа от параметров, задающих его развертку. Опишите первые три члена полученного ряда. **(5 баллов)**

**Всего – 10 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 7. Симметрия и изомеры



1. Форму какого многогранника имеет фуллерен  $C_{60}$  (бакибол)? Сколько у этого многогранника ребер, сколько и каких граней? **(1 балл)**

Про молекулу говорят, что она имеет поворотную ось симметрии  $n$ -го порядка ( $n > 1$ ), если при повороте на угол, кратный  $360^\circ/n$ , молекула совпадает сама с собой.

2. Определите, какие поворотные оси и в каком количестве содержит молекула бакибола. Поясните, как они расположены в ней относительно вершин, ребер и граней многогранника. **(3 балла)**

Симметрия молекулы помогает определить количество возможных геометрических изомеров (таких молекул одинакового состава, которые не переводятся друг в друга никакими поворотами в пространстве).

3. Найдите количество изомеров частицы, образующейся при хлорировании бакибола  $C_{60}$  если в ней:
  - а) атом хлора расположен над одной из вершин бакибола; **(0.5 балла)**
  - б) два атома хлора расположены над атомами углерода, принадлежащими одному из ребер бакибола; **(1 балл)**
  - в) два атома хлора расположены над атомами углерода, принадлежащими одной из граней бакибола. Рассмотрите все возможные расположения атомов хлора на одной грани, и поясните, какие из них являются изомерными, а какие переходят (объясните, как) друг в друга при различных поворотах вокруг осей симметрии. **(3.5 балла)**

Ответы поясните или проиллюстрируйте рисунками. При решении можно использовать футбольный мяч как модель бакибола.

**Всего – 9 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 8. Вот, новый поворот

Несколько лет назад в семействе углеродных материалов появилась новинка – двухслойный графен<sup>1</sup>, свойства которого, прежде всего, электронные, отличны как от графена, так и от многослойного графита. Значительная часть этих свойств определяется взаимным расположением атомов углерода двух слоев друг относительно друга. Самым интересным является так называемый повернутый графен, в котором слои повернуты друг относительно друга на некоторый произвольный угол ( $0^\circ < \theta < 30^\circ$ ). В этом случае наблюдаются периодические структуры с шагом, превышающим период графенового листа (рис. 1), так называемый муаровый узор (периодический узор, возникающий как результат интерференции при наложении двух периодических сетчатых рисунков).

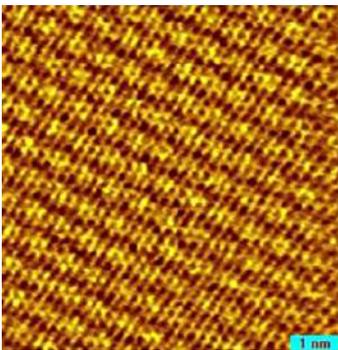


Рис. 1

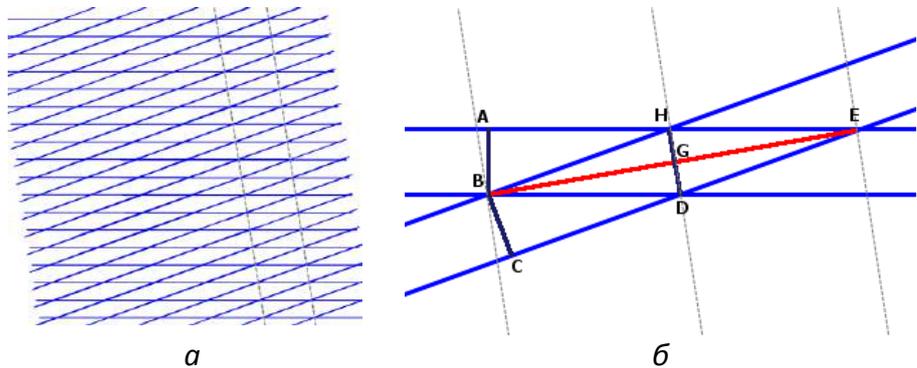


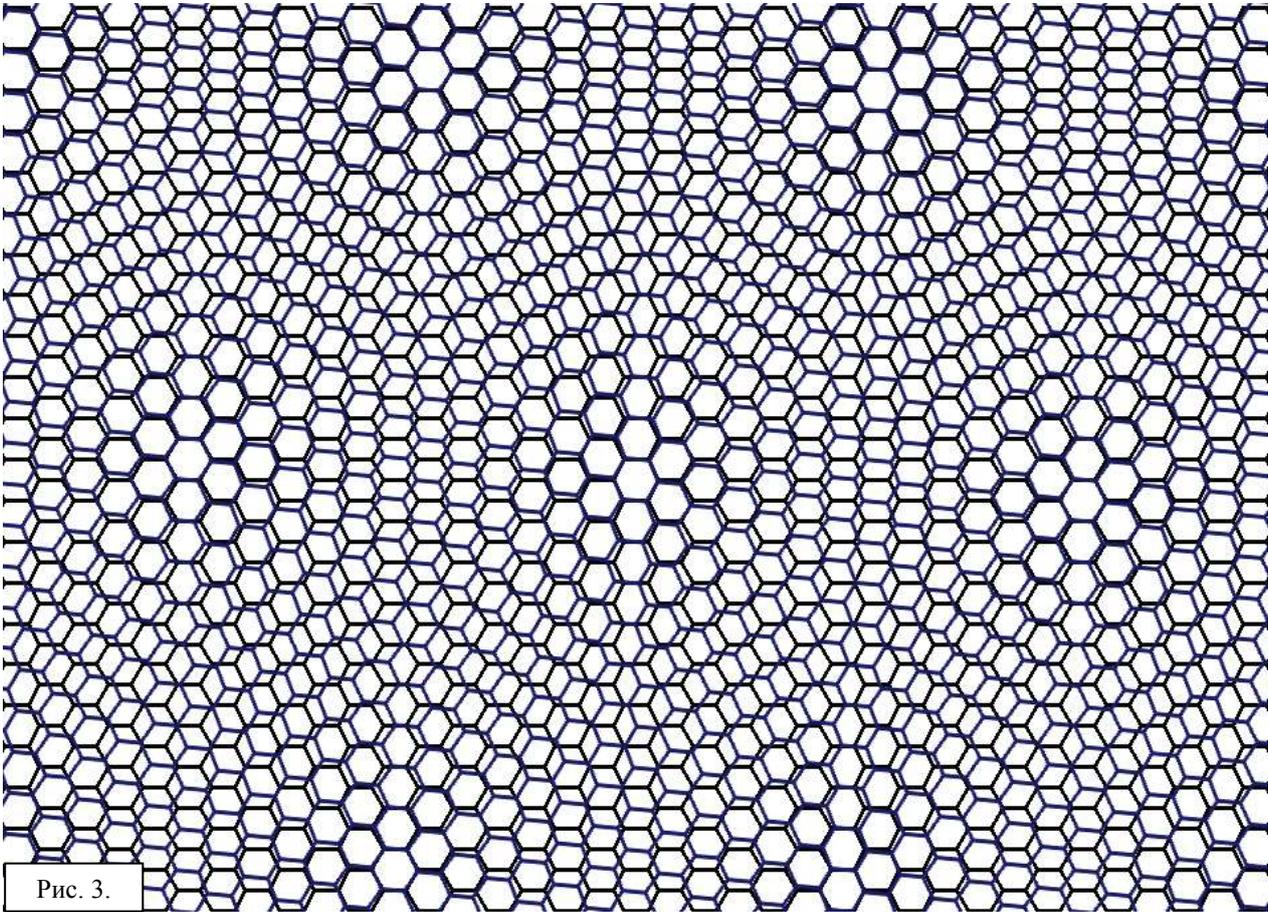
Рис. 2. Простейший муаровый узор (а) возникает при пересечении двух систем равноудаленных параллельных линий (б, пары линий  $AE$ ,  $BD$  и  $BH$ ,  $CE$ ), повернутых друг относительно друга на некоторый угол  $\vartheta = \angle HBD$ . Если посмотреть на такой узор (а) издали, то можно увидеть чередование более темных и более светлых полос (отмечены пунктиром). Минимальное расстояние между светлыми полосами (шаг повтора муарового узора) составляет  $BG = L$ .

1. Выведите общий вид зависимости  $L(\theta)$  для простейшего муарового узора (рис. 2), если расстояние между параллельными линиями составляет  $AB = BC = d$ . (3 балла)

Рассмотрим пример (рис. 3) наложения двух графеновых сеток<sup>1</sup>, одна из которых повернута относительно другой так, что ось вращения лежит по центру одного из шестиугольников.

2. Отметьте на рисунке 3 предполагаемую ось вращения, а также точки, в которых муаровый узор идентичен первой отметке. Проведя необходимые геометрические построения, определите индексы хиральности  $(n, m)^2$  для кратчайшего отрезка, соединяющего пару отмеченных точек относительно первой (черной) и второй (синей) сетки шестиугольников. (2 балла)

3. Основываясь на полученных величинах ( $n$ ,  $m$ ), рассчитайте угол  $\theta$  между осями координат двух графеновых сеток и длину отмеченного отрезка  $L$  (в нм). **(4.5 балла)**  
Атомы углерода считать точечными, длину связи С–С равной  $a = 0,14$  нм.



4. Исходя из найденных величин ( $L$ ,  $\theta$  для рис. 3), по формуле, выведенной в п. 1, рассчитайте величину  $d$  для графена. Какому из параметров шестиугольной графеновой сетки (сторона шестиугольника, его малая или большая диагональ) соответствует полученное значение? **(1.5 балла)**

В условиях эксперимента определить индексы хиральности, как правило, невозможно. В то же время, современные спектроскопические методы позволяют достаточно точно измерить шаг повтора муарового узора  $L$ . Муаровый узор для повернутого двухслойного графена можно наблюдать, например, при помощи сканирующего туннельного микроскопа (СТМ).

5. Оцените величины угла  $\theta$  для четырех образцов, представленных на рис. 4. **(6 баллов)**

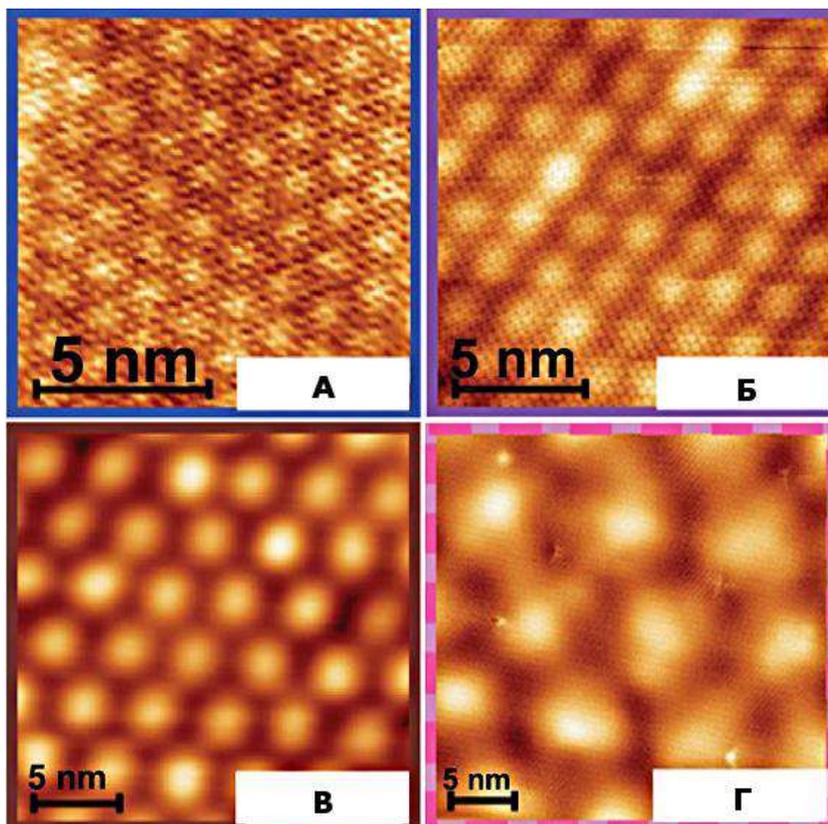


Рис. 4. СТМ-изображения четырех образцов двухслойного повернутого графена.

<sup>1</sup> Графен – слой атомов углерода толщиной в один атом, соединенных в гексагональную двумерную решетку (рис. 5). Можно представить как одну плоскость графита, отделенную от объемного кристалла.

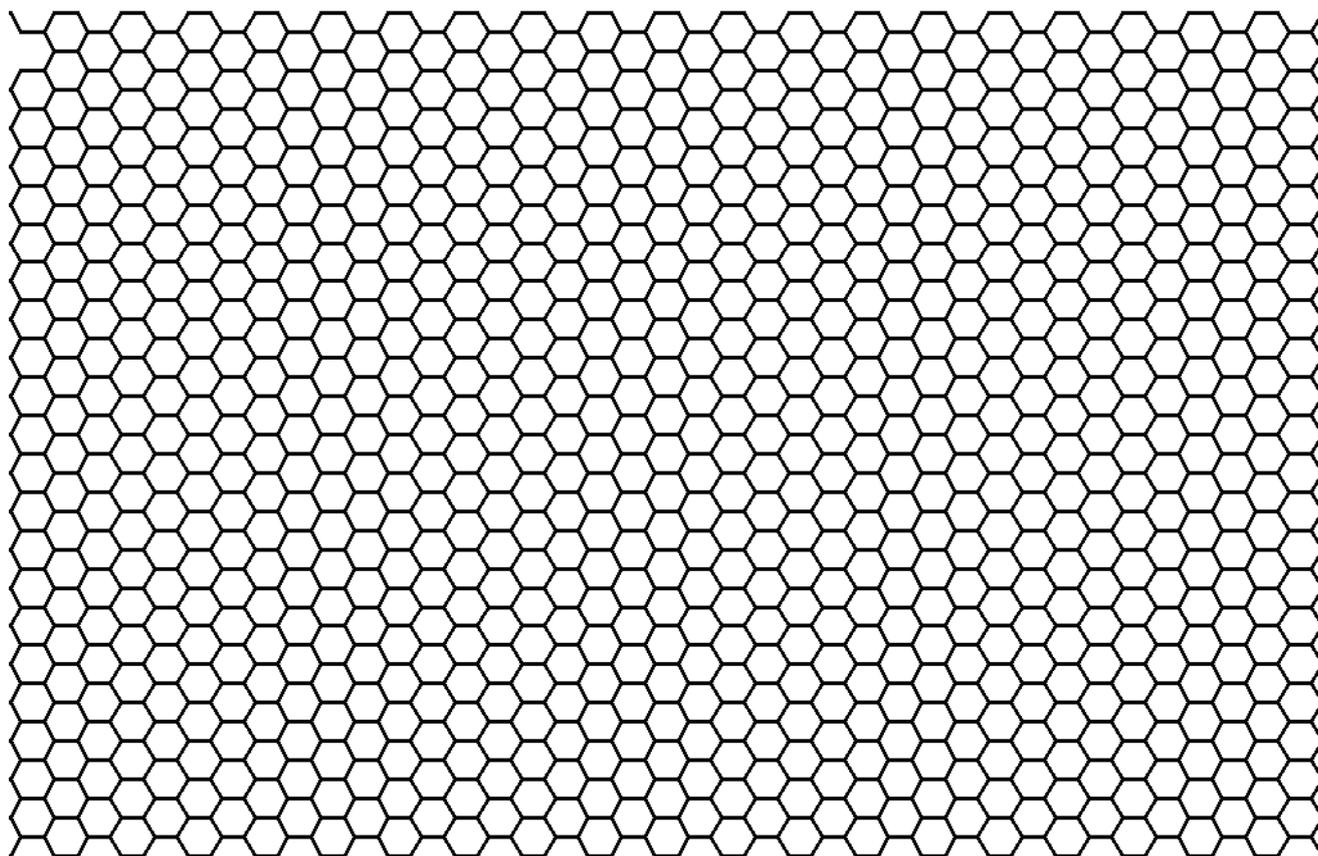


Рис. 5. Вспомогательный материал. Схема сетки шестиугольников листа графена.

<sup>2</sup> Рис. 6.

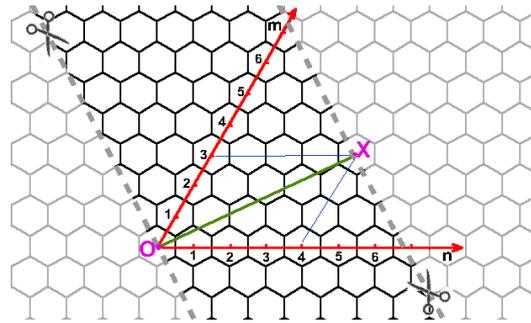


Рис. 6. Пример развертки УНТ (4,3).

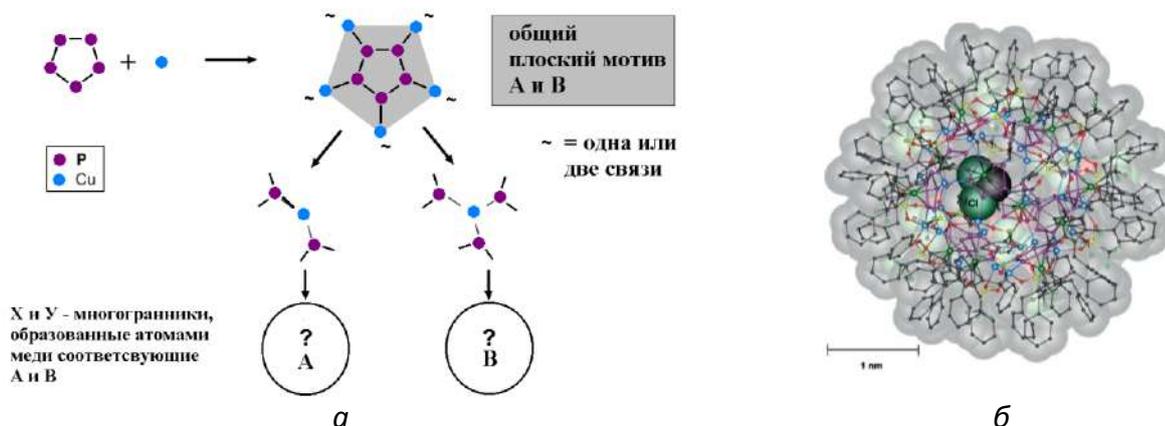
Любую пару шестиугольников на графеновом листе можно описать парой натуральных чисел  $(n,m)$ , являющихся координатами центра одного из них относительно центра другого в косоугольной системе координат. Такая пара чисел носит название *индексов хиральности* и может, например, задавать ширину развертки углеродной нанотрубки.

**Всего – 17 баллов**



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 9. Медно-фосфорные каркасы



*Рис. 1. а) Схема образования связей между фосфорными пятиугольниками  $P_5$  и атомами меди  $Cu$  в каркасах **A** и **B**: каждый атом фосфора связан с 2 атомами фосфора и одним атомом меди, каждый атом меди связан с двумя (**A**) или тремя (**B**) атомами фосфора. б) Пример модели реальной супрамолекулы, основанной на таком (п. а) медно-фосфорном каркасе. В ее внутренней полости находится молекула-гость. Такие каркасные молекулы могут использоваться для хранения и доставки лекарств.*

Комбинирование пятиугольных фосфорных фрагментов  $P_5$  с атомами меди  $Cu$  (рис. 1а) позволяет получить два типа медно-фосфорных каркасов  $P_nCu_m$  – **A** и **B**.

1. Для каждого из каркасов (**7 баллов**):

- а) установите соотношение атомов **n:m**;
- б) сколько атомов меди и фосфора содержат медно-фосфорные циклы (самые короткие замкнутые цепочки связей, содержащие медь и фосфор)?
- в) найдите **n** и **m**, основываясь на указанных способах объединения общего плоского мотива в составе структур каркасов и используя теорему<sup>1</sup> Эйлера для выпуклых многогранников;
- г) сколько медно-фосфорных циклов содержится в каркасе?
- д) в вершинах каких многогранников лежат центры пятиугольников  $P_5$ ?

Каркасам **A** и **B** можно сопоставить многогранники **X** и **Y**, вершинами которых являются только атомы меди таких супрамолекул.

2. Установите структуры **X** и **Y** (**2 балла**):

- а) сколько и каких граней они содержат?
- б) как называются эти многогранники?

3. Для многогранника **X** можно выделить плоскости, проходящие через его центр, которые содержат более двух его вершин (**2 балла**):

- а) сколько вершин лежит в каждой такой плоскости?
- б) какую плоскую геометрическую фигуру при этом образуют эти вершины?
- в) сколько таких фигур можно выделить в **X**?

4. Рассчитайте размеры многогранников **X** и **Y** как диаметры описанных вокруг них сфер, если радиус атома меди составляет 0,124 нм, радиус атома фосфора 0,109 нм. **(3 балла)** Для **Y** можно воспользоваться справочной формулой.
5. При сборке каркаса **A** также был получен каркас **A'**, отличающийся от **A** тем, что часть вершин многогранника **X** вакантны – в них отсутствуют атомы меди **(3 балла)**:
- а) опишите все возможные при этом варианты расположения вакансий, если известно, что каркас **A'** обладает осью симметрии пятого порядка, а его состав совпадает с составом **B**;
- б) какие из этих структур могут соответствовать реальной молекуле? Поясните.

<sup>1</sup> Теорема Эйлера для выпуклого многогранника:  $V - E + F = 2$ , где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, ребер и граней.

**Всего – 17 баллов**

**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**

**Задача 10. Устойчивость магических кластеров**

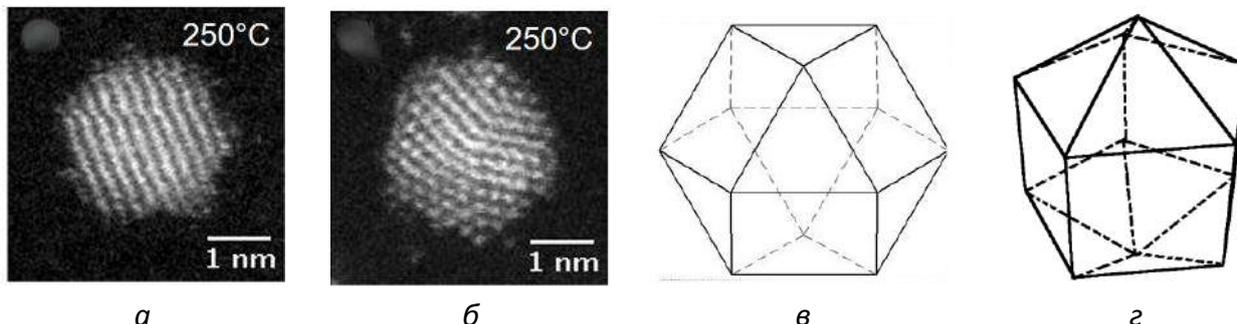


Рис. 1. Изображения золотых кластеров, полученные при помощи сканирующего туннельного микроскопа высокого разрешения: а) кубооктаэдр, б) скошенный икосаэдр. Схематичное изображение многогранников: в) кубооктаэдр, г) скошенный икосаэдр.

Синтез золотых наночастиц в некоторых условиях приводит к получению смеси нанокластеров, в которой есть наночастицы как в форме кубооктаэдров, так и скошенных икосаэдров (рис. 1 а, б). При равенстве длин ребер эти нанокластеры содержат одинаковое число атомов ( $N = (10n^3 - 15n^2 + 11n - 3)/3$ , где  $n$  – число атомов, приходящееся на ребро), то есть, являются изомерами.

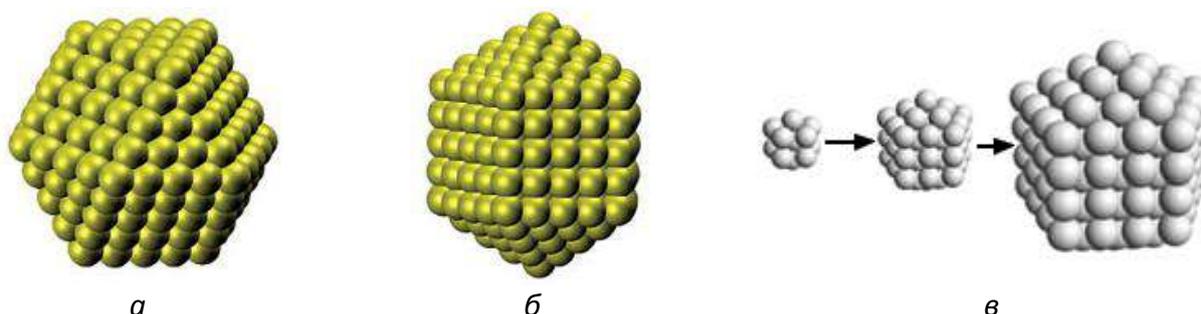


Рис. 2. Трехмерные модели нанокластеров в форме а) кубооктаэдра, б) скошенного икосаэдра. в) Модели нанокластера в форме скошенного икосаэдра для  $n = 2, 3, 4$ .

- Для нанокластеров обеих форм с  $n = 6$  найдите:
  - общее число атомов в нанокластере  $N$  и число атомов на его поверхности  $M$ ; **(1 балл)**
  - число ближайших соседей у атомов, находящихся в объеме нанокластера; **(1 балл)**
  - сколько типов атомов, отличающихся друг от друга окружением, присутствует на поверхности нанокластера. Опишите их расположение; **(4 балла)**
  - сколько «соседей» у атомов каждого из типов. **(5 баллов)**
- Устойчивость нанокластеров тем выше, чем ближе суммарное количество «соседей» всех атомов к максимально возможному окружению (такому, как в объеме нанокластера). Основываясь на результате, полученном в п. 1, определите, какая из двух форм является более устойчивой. **(2 балла)**

3. Для обеих форм нанокластеров рассчитайте и сравните площадь поверхности многогранников, вершины которых лежат в центрах атомов, расположенных в вершинах нанокластеров. Радиус атома золота принять равным  $a = 0,144$  нм.  
**(3 балла)**

*Указание. Воспользуйтесь решением задачи «Кубоктаэдр»:*

<http://enanos.nanometer.ru/uploads/archive/2017-tasks.pdf> (с.223, 230-231).

**Всего – 16 баллов**