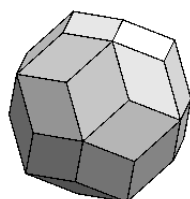


Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур) Простые задачи (вариант 1)

Задача 1. Многогранники из ромбов

Рассмотрим кластер, поверхность которого представляет собой F ромбов, а все вершины можно поделить на два типа, в которых сходятся a и b ребер, соответственно.

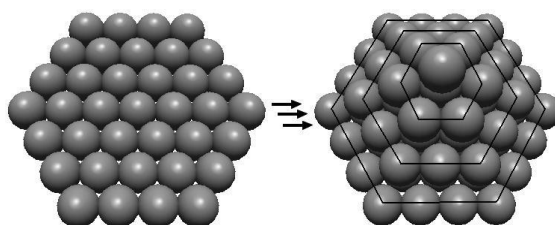


Для некоторого кластера X разность $b - a = 1$.

1. Найдите все возможные пары значений a и b . Ответ обоснуйте. **(4 балла)**
2. Опишите кластер X (найдите число ребер E , вершин V , а также число вершин каждого типа), для $F = 12$. **(4 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 2. Пирамида из шестиугольников



Некоторый нанокластер представляет собой шестиугольную пирамиду, сложенную, как изображено на рисунке, из касающихся друг друга n плотноупакованных слоев атомов (показан пример для $n = 4$).

1. Найдите число атомов в кластере для $n = 32$. **(5 баллов)**
2. Найдите размер пирамиды как радиус описанной вокруг кластера сферы, если атомы имеют радиус $a = 0,14$ нм. **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

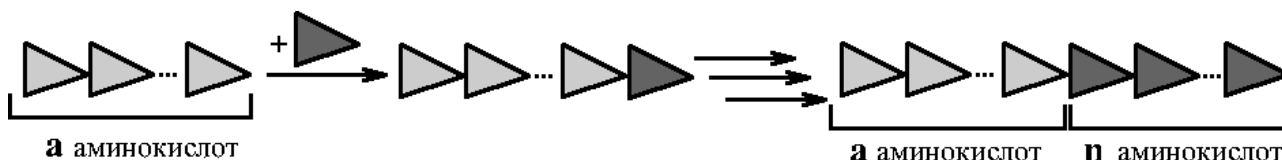
Задача 3. Наночастицы серебра

Для получения нового лекарства юный химик приготовил суспензию из наночастиц серебра в 1 литре воды. Затем он при помощи пипетки отобрал 1 мл полученной суспензии и поместил его в мерную колбу объемом 100 мл и долил в эту колбу воды до метки. Операцию разведения (отбор 1 мл и доведение до 100 мл) он повторил еще 7 раз, после

чего разлил итоговую суспензию по 100 одинаковым пробиркам. Проведя анализ, юный химик установил, что 39 пробирок не содержат ни одной серебряной наночастицы. Оцените радиус сферических наночастиц серебра r (нм), если известно, что величина исходной навески равна 21 мг, плотность серебра составляет $10,5 \text{ г/см}^3$. Считайте, что при всех операциях наночастицы распределяются по объему суспензии равномерно.

Всего – 8 баллов

Задача 4. Комбинаторная библиотека полипептидов



Для создания комбинаторной библиотеки¹ юный нанотехнолог Полуэкт взял $V = 0,5$ мл раствора полипептида A^2 , один литр которого содержит $c = 0,7$ микромоль полипептида. Затем он провел химическую реакцию со смесью аминокислот, в ходе которой к каждой молекуле полипептида случайным образом присоединялась одна из 20 аминокислот (см. схему). Найдите максимальный размер комбинаторной библиотеки, которую мог получить Полуэкт, если с полипептидом A он последовательно провел $n = 12$ таких реакций. Ответ обоснуйте.

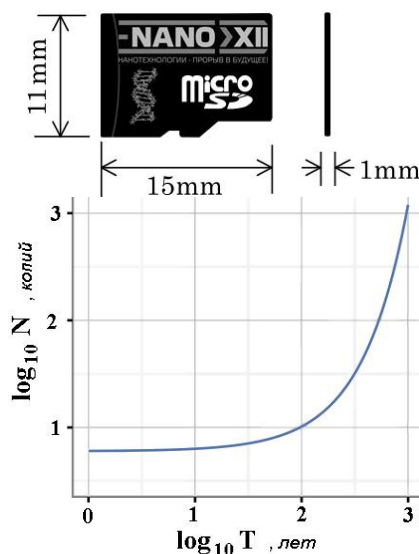
В одном моле полипептида содержится $6 \cdot 10^{23}$ молекул.

¹ Представляет собой в данном случае смесь большого числа различных пептидных последовательностей, среди которых можно искать новые лекарства.

² Представляет собой известную последовательность из $a = 10$ аминокислот.

Всего – 8 баллов

Задача 5. Биомолекулярная карта памяти



Биомолекула ДНК представляет собой цепочку, записанную 4 буквами нуклеотидов (ACGT), и несет в себе наследственную информацию. Она является перспективным нано-носителем для записи и длительного хранения данных.

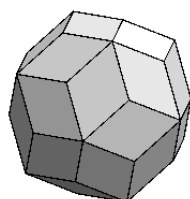
1. Сколько информации (в Тбайт) можно хранить на носителе, представляющем собой параллелепипед с размерами, как у microSD карточки памяти (см. рисунок), заполненный молекулами ДНК, занимающими 20% от его объема? Известно, что $6 \cdot 10^{23}$ нуклеотидов в составе ДНК имеют массу в среднем 350 г. Считать плотность ДНК равной $1,1 \text{ г/см}^3$, цепочку нуклеотидов – одинарной, 1 Тбайт равным $1,1 \cdot 10^{12}$ байт. **(5 баллов)**
2. Молекула ДНК при хранении медленно разрушается, поэтому, чтобы через время T информацию можно было надежно считать, необходимо иметь N копий одинаковых цепочек (см. график $N(T)$). Сколько информации можно записать на носитель из п.1, если ее необходимо надежно хранить в течение $T = 1000$ лет? **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур) Простые задачи (вариант 2)

Задача 1. Многогранники из ромбов

Рассмотрим кластер, поверхность которого представляет собой F ромбов, а все вершины можно поделить на два типа, в которых сходятся a и b ребер, соответственно.

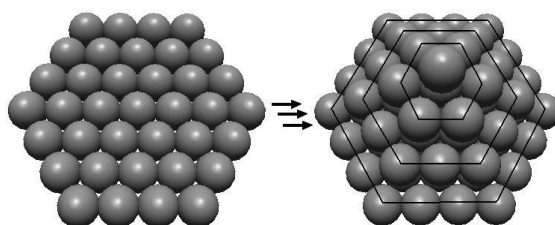


Для некоторого кластера X разность $b - a = 1$.

1. Найдите все возможные пары значений a и b . Ответ обоснуйте. **(4 балла)**
2. Опишите кластер X (найдите число ребер E , вершин V , а также число вершин каждого типа), для $F = 14$. **(4 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 2. Пирамида из шестиугольников



Некоторый нанокластер представляет собой шестиугольную пирамиду, сложенную, как изображено на рисунке, из касающихся друг друга n плотноупакованных слоев атомов (показан пример для $n = 4$).

1. Найдите число атомов в кластере для $n = 34$. **(5 баллов)**
2. Найдите размер пирамиды как радиус описанной вокруг кластера сферы, если атомы имеют радиус $a = 0,14$ нм. **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

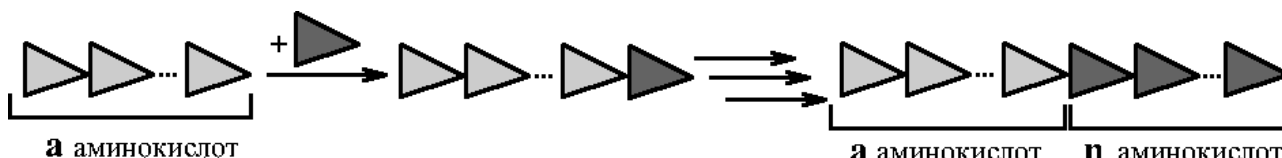
Задача 3. Наночастицы серебра

Для получения нового лекарства юный химик приготовил суспензию из наночастиц серебра в 1 литре воды. Затем он при помощи пипетки отобрал 1 мл полученной суспензии и поместил его в мерную колбу объемом 100 мл и долил в эту колбу воды до метки. Операцию разведения (отбор 1 мл и доведение до 100 мл) он повторил еще 7 раз, после

чего разлил итоговую суспензию по 100 одинаковым пробиркам. Проведя анализ, юный химик установил, что 64 пробирки не содержат ни одной серебряной наночастицы. Оцените радиус сферических наночастиц серебра r (нм), если известно, что величина исходной навески равна 42 мг, плотность серебра составляет $10,5 \text{ г/см}^3$. Считайте, что при всех операциях наночастицы распределяются по объему суспензии равномерно.

Всего – 8 баллов

Задача 4. Комбинаторная библиотека полипептидов



Для создания комбинаторной библиотеки¹ юный нанотехнолог Полуэкт взял $V = 10,5$ мл раствора полипептида A^2 , один литр которого содержит $c = 3$ микромоль полипептида. Затем он провел химическую реакцию со смесью аминокислот, в ходе которой к каждой молекуле полипептида случайным образом присоединялась одна из 20 аминокислот (см. схему). Найдите максимальный размер комбинаторной библиотеки, которую мог получить Полуэкт, если с полипептидом A он последовательно провел $n = 13$ таких реакций. Ответ обоснуйте.

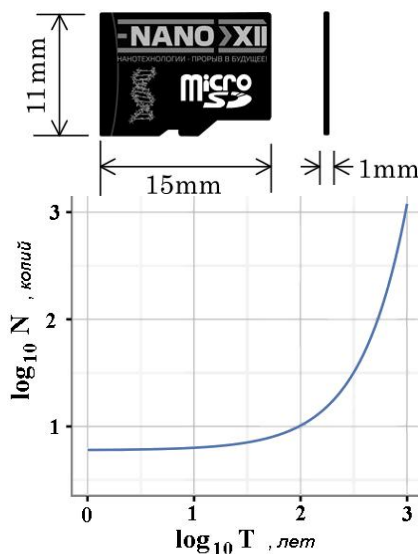
В одном моле полипептида содержится $6 \cdot 10^{23}$ молекул.

¹ Представляет собой в данном случае смесь большого числа различных пептидных последовательностей, среди которых можно искать новые лекарства.

² Представляет собой известную последовательность из $a = 13$ аминокислот.

Всего – 8 баллов

Задача 5. Биомолекулярная карта памяти



Биомолекула ДНК представляет собой цепочку, записанную 4 буквами нуклеотидов (ACGT), и несет в себе наследственную информацию. Она является перспективным нано-носителем для записи и длительного хранения данных.

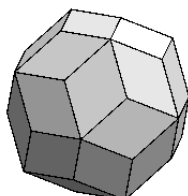
1. Сколько информации (в Тбайт) можно хранить на носителе, представляющем собой параллелепипед с размерами, как у microSD карточки памяти (см. рисунок), заполненный молекулами ДНК, занимающими 20% от его объема? Известно, что $6 \cdot 10^{23}$ нуклеотидов в составе ДНК имеют массу в среднем 350 г. Считать плотность ДНК равной $1,1 \text{ г/см}^3$, цепочку нуклеотидов – одинарной, 1 Тбайт равным $1,1 \cdot 10^{12}$ байт. **(5 баллов)**
2. Молекула ДНК при хранении медленно разрушается, поэтому, чтобы через время T информацию можно было надежно считать, необходимо иметь N копий одинаковых цепочек (см. график $N(T)$). Сколько информации можно записать на носитель из п.1, если ее необходимо надежно хранить в течение $T = 100$ лет? **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур) Простые задачи (вариант 3)

Задача 1. Многогранники из ромбов

Рассмотрим кластер, поверхность которого представляет собой F ромбов, а все вершины можно поделить на два типа, в которых сходятся a и b ребер, соответственно.

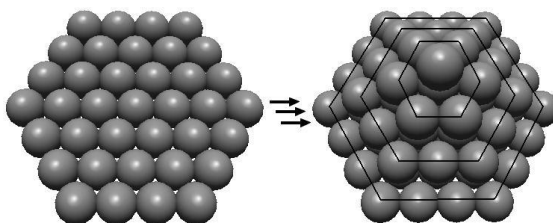


Для некоторого кластера X разность $b - a = 1$.

1. Найдите все возможные пары значений a и b . Ответ обоснуйте. (4 балла)
2. Опишите кластер X (найдите число ребер E , вершин V , а также число вершин каждого типа), для $F = 16$. (4 балла)

Всего – 8 баллов

Задача 2. Пирамида из шестиугольников



Некоторый нанокластер представляет собой шестиугольную пирамиду, сложенную, как изображено на рисунке, из касающихся друг друга n плотноупакованных слоев атомов (показан пример для $n = 4$).

1. Найдите число атомов в кластере для $n = 36$. (5 баллов)
2. Найдите размер пирамиды как радиус описанной вокруг кластера сферы, если атомы имеют радиус $a = 0,14$ нм. (3 балла)

Всего – 8 баллов

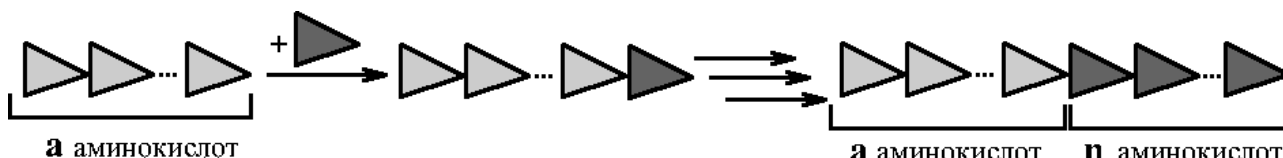
Задача 3. Наночастицы серебра

Для получения нового лекарства юный химик приготовил суспензию из наночастиц серебра в 1 литре воды. Затем он при помощи пипетки отобрал 1 мл полученной суспензии и поместил его в мерную колбу объемом 100 мл и долил в эту колбу воды до метки. Операцию разведения (отбор 1 мл и доведение до 100 мл) он повторил еще 7 раз, после

чего разлил итоговую суспензию по 100 одинаковым пробиркам. Проведя анализ, юный химик установил, что 28 пробирок не содержат ни одной серебряной наночастицы. Оцените радиус сферических наночастиц серебра r (нм), если известно, что величина исходной навески равна 84 мг, плотность серебра составляет $10,5 \text{ г/см}^3$. Считайте, что при всех операциях наночастицы распределяются по объему суспензии равномерно.

Всего – 8 баллов

Задача 4. Комбинаторная библиотека полипептидов



Для создания комбинаторной библиотеки¹ юный нанотехнолог Полуэкт взял $V = 7$ мл раствора полипептида A^2 , один литр которого содержит $c = 5$ микромоль полипептида. Затем он провел химическую реакцию со смесью аминокислот, в ходе которой к каждой молекуле полипептида случайным образом присоединялась одна из 20 аминокислот (см. схему). Найдите максимальный размер комбинаторной библиотеки, которую мог получить Полуэкт, если с полипептидом A он последовательно провел $n = 14$ таких реакций. Ответ обоснуйте.

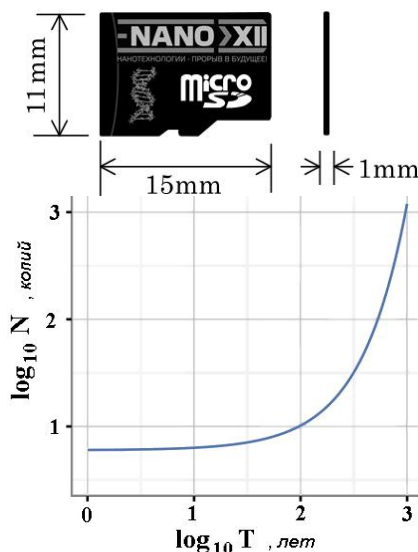
В одном моле полипептида содержится $6 \cdot 10^{23}$ молекул.

¹ Представляет собой в данном случае смесь большого числа различных пептидных последовательностей, среди которых можно искать новые лекарства.

² Представляет собой известную последовательность из $a = 11$ аминокислот.

Всего – 8 баллов

Задача 5. Биомолекулярная карта памяти



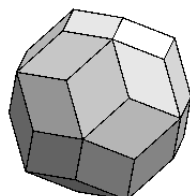
Биомолекула ДНК представляет собой цепочку, записанную 4 буквами нуклеотидов (ACGT), и несет в себе наследственную информацию. Она является перспективным нано-носителем для записи и длительного хранения данных.

1. Сколько информации (в Тбайт) можно хранить на носителе, представляющем собой параллелепипед с размерами, как у microSD карточки памяти (см. рисунок), заполненный молекулами ДНК, занимающими 30% от его объема? Известно, что $6 \cdot 10^{23}$ нуклеотидов в составе ДНК имеют массу в среднем 350 г. Считать плотность ДНК равной $1,1 \text{ г/см}^3$, цепочку нуклеотидов – одинарной, 1 Тбайт равным $1,1 \cdot 10^{12}$ байт. **(5 баллов)**
2. Молекула ДНК при хранении медленно разрушается, поэтому, чтобы через время T информацию можно было надежно считать, необходимо иметь N копий одинаковых цепочек (см. график $N(T)$). Сколько информации можно записать на носитель из п.1, если ее необходимо надежно хранить в течение $T = 1000$ лет? **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 1. Многогранники из ромбов

Рассмотрим кластер, поверхность которого представляет собой F ромбов, а все вершины можно поделить на два типа, в которых сходятся a и b ребер, соответственно.

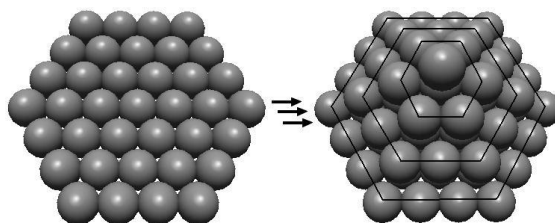


Для некоторого кластера X разность $b - a = 1$.

1. Найдите все возможные пары значений a и b . Ответ обоснуйте. **(4 балла)**
2. Опишите кластер X (найдите число ребер E , вершин V , а также число вершин каждого типа), для $F = 18$. **(4 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 2. Пирамида из шестиугольников



Некоторый нанокластер представляет собой шестиугольную пирамиду, сложенную, как изображено на рисунке, из касающихся друг друга n плотноупакованных слоев атомов (показан пример для $n = 4$).

1. Найдите число атомов в кластере для $n = 38$. **(5 баллов)**
2. Найдите размер пирамиды как радиус описанной вокруг кластера сферы, если атомы имеют радиус $a = 0,14$ нм. **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

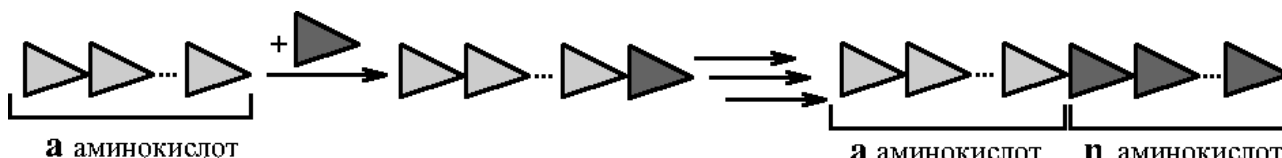
Задача 3. Наночастицы серебра

Для получения нового лекарства юный химик приготовил суспензию из наночастиц серебра в 1 литре воды. Затем он при помощи пипетки отобрал 1 мл полученной суспензии и поместил его в мерную колбу объемом 100 мл и долил в эту колбу воды до метки. Операцию разведения (отбор 1 мл и доведение до 100 мл) он повторил еще 7 раз, после

чего разлил итоговую суспензию по 100 одинаковым пробиркам. Проведя анализ, юный химик установил, что 70 пробирок не содержат ни одной серебряной наночастицы. Оцените радиус сферических наночастиц серебра r (нм), если известно, что величина исходной навески равна 84 мг, плотность серебра составляет $10,5 \text{ г/см}^3$. Считайте, что при всех операциях наночастицы распределяются по объему суспензии равномерно.

Всего – 8 баллов

Задача 4. Комбинаторная библиотека полипептидов



Для создания комбинаторной библиотеки¹ юный нанотехнолог Полуэкт взял $V = 20$ мл раствора полипептида A^2 , один литр которого содержит $c = 6$ микромоль полипептида. Затем он провел химическую реакцию со смесью аминокислот, в ходе которой к каждой молекуле полипептида случайным образом присоединялась одна из 20 аминокислот (см. схему). Найдите максимальный размер комбинаторной библиотеки, которую мог получить Полуэкт, если с полипептидом A он последовательно провел $n = 14$ таких реакций. Ответ обоснуйте.

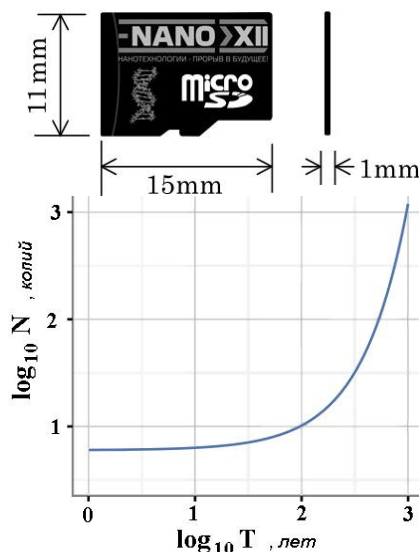
В одном моле полипептида содержится $6 \cdot 10^{23}$ молекул.

¹ Представляет собой в данном случае смесь большого числа различных пептидных последовательностей, среди которых можно искать новые лекарства.

² Представляет собой известную последовательность из $a = 9$ аминокислот.

Всего – 8 баллов

Задача 5. Биомолекулярная карта памяти



Биомолекула ДНК представляет собой цепочку, записанную 4 буквами нуклеотидов (ACGT), и несет в себе наследственную информацию. Она является перспективным нано-носителем для записи и длительного хранения данных.

1. Сколько информации (в Тбайт) можно хранить на носителе, представляющем собой параллелепипед с размерами, как у microSD карточки памяти (см. рисунок), заполненный молекулами ДНК, занимающими 30% от его объема? Известно, что $6 \cdot 10^{23}$ нуклеотидов в составе ДНК имеют массу в среднем 350 г. Считать плотность ДНК равной $1,1 \text{ г/см}^3$, цепочку нуклеотидов – одинарной, 1 Тбайт равным $1,1 \cdot 10^{12}$ байт. **(5 баллов)**
2. Молекула ДНК при хранении медленно разрушается, поэтому, чтобы через время T информацию можно было надежно считать, необходимо иметь N копий одинаковых цепочек (см. график $N(T)$). Сколько информации можно записать на носитель из п.1, если ее необходимо надежно хранить в течение $T = 100$ лет? **(3 балла)**

Всего – 8 баллов

Задача 6. Три нанотрубки углеродного тора

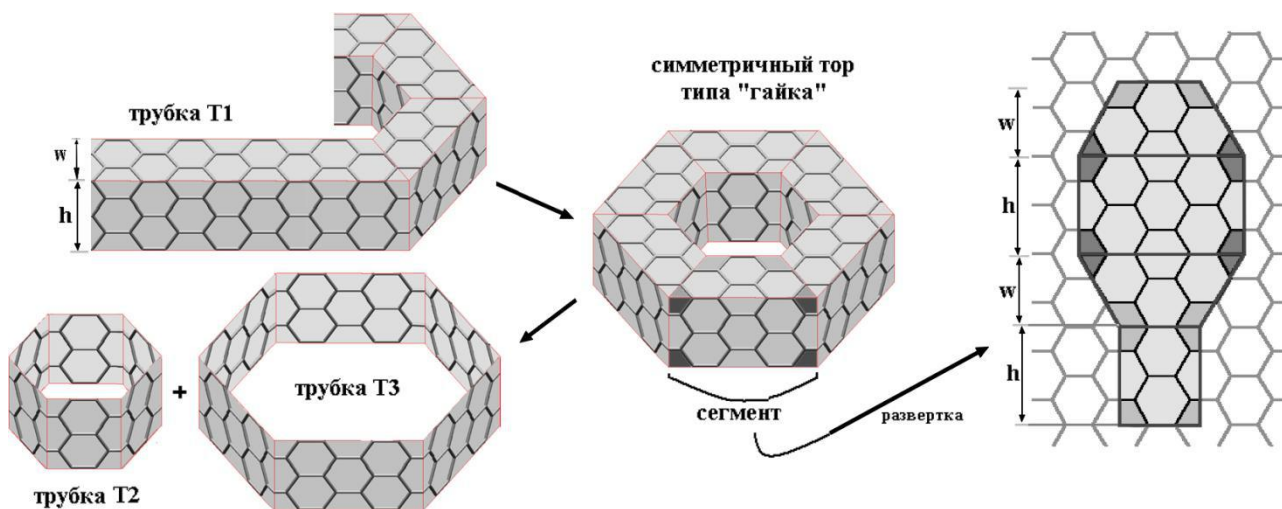


Рис.1 а) Симметричный углеродный нанотор типа «гайка», состоящий из шести одинаковых сегментов, может быть получен из углеродной нанотрубки T1, которой придали прямоугольную форму с отношением высоты к ширине $z = h/w$. При этом внутренняя и внешняя поверхности такого нанотора также представляют собой фрагменты нанотрубок T2 и T3, соответственно.

б) Выкройка сегмента симметричного нанотора на листе графена может быть представлена в виде двух прямоугольников (фрагментов нанотрубок T2 и T3), соединенных одинаковыми трапециями, боковые стороны которых соединяют центры семи- и пятиугольных циклов.

1. Для нанотора (рис. 1) определите индексы хиральности нанотрубок T1 (n_1, m_1), T2 (n_2, m_2) и T3 (n_3, m_3), а также z . **(3 балла)**
2. Оцените размер этого нанотора как диаметр цилиндра, описанного вокруг боковой поверхности. Атомы углерода считать точечными, длину связи C–C равной $a = 0,14$ нм. **(1 балл)**
3. Для нанотрубки T1 (11,0) и $z = 2/9$ найдите:
 - а) минимальные значения (n_2, m_2), (n_3, m_3); **(3 балла)**
 - б) общий вид (n_2, m_2), (n_3, m_3) для получающейся серии торов; **(1 балл)**
 - в) число атомов углерода в наноторе из п.3а. **(3 балла)**
4. Из нанотрубки T1 ($x_1, 0$) и параметром z был получен самый маленький нанотор. Выведите в общем виде зависимости индексов хиральности (n_2, m_2) и (n_3, m_3) от x_1 и z . **(5 баллов)**
5. Чему должно быть кратно x_1 у наноторов с $z = 1$? Ответ обоснуйте. **(4 балла)**

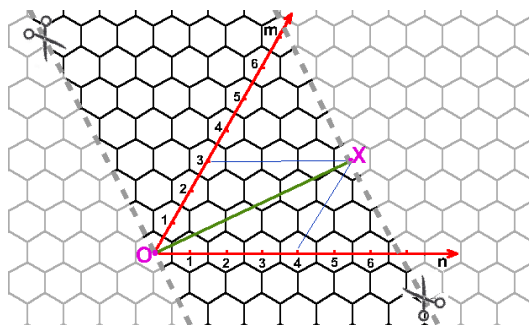
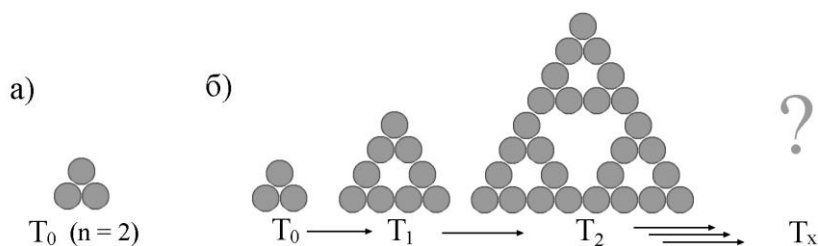


Рис.2. Почти любая пара шестиугольников на графеновом листе может задавать углеродную нанотрубку. Зафиксируем центр первого шестиугольника в точке **O**. Расположение второго шестиугольника (**X**) относительно первого можно задать парой натуральных чисел (n,m) являющихся его координатами в «скошенной» системе координат и называющихся индексами хиральности нанотрубки. Линии разреза развертки перпендикулярны OX .
На рисунке приведен пример развертки нанотрубки $(4,3)$.

Всего – 20 баллов

Задача 7. Треугольник Серпинского



Рассмотрим плоский треугольный нанокластер T_0 , ребро которого содержит n атомов золота (на рис. а показан пример для $n = 2$). Из трех таких нанокластеров можно собрать (как показано на рис. б) новый треугольный нанокластер – T_1 . Повторив для T_1 процедуру складывания трех треугольников, получаем треугольный нанокластер T_2 , из T_2 получаем T_3 , и так далее вплоть до фрактального треугольника Серпинского T_x .

1. Сколько атомов **N** будет содержаться в нанокластере T_x в зависимости от **n** и **x**? **(3 балла)**
2. Установите **n** и **x** для золотого нанокластера **A** с $N = 10206$. Опишите оптимальную стратегию их поиска. **(5 баллов)**
3. Рассчитайте размер нанокластера **A** (как диаметр описанной вокруг треугольника окружности), если радиус атома золота равен $r = 0,144$ нм. **(3 балла)**
4. Сколько атомов золота надо добавить в нанокластер **A**, чтобы получить полностью заполненный плоский треугольный нанокластер **B** того же размера? **(3 балла)**

Изомерными называются нанокластеры, имеющие одинаковое число атомов **N**, но разные **n** и **x**: $N(T_{x_1}(n_1)) = N(T_{x_2}(n_2))$.

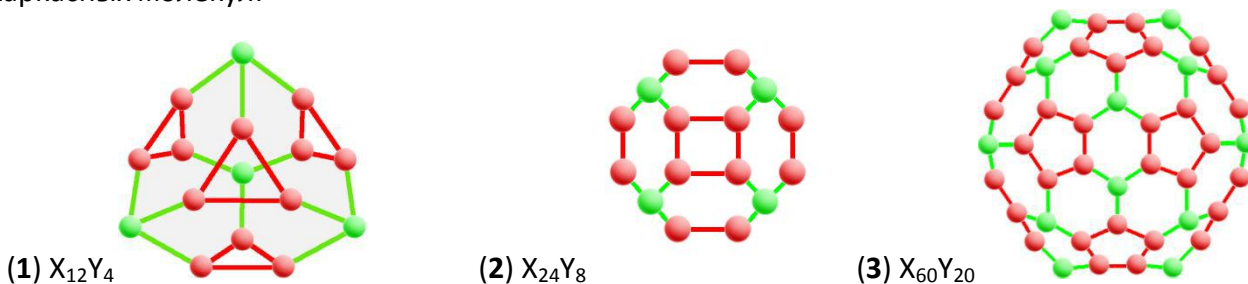
5. Рассчитайте **N** и найдите **n₂** и **x₂**, отвечающие изомерам нанокластеров:

- а) T₂ (5) (2 балла);
б) T₄ (10) (4 балла).

Всего – 20 баллов

Задача 8. Геометрия каркасных молекул

Методом самосборки из **k**-валентных **k**-угольников (3, 4, 5-угольных фрагментов **X**) и трехвалентного фрагмента **Y** можно получить всего три типа высокосимметричных каркасных молекул:



1. Рассчитайте размеры молекул **1** и **2** как радиусы описанных сфер. (5 баллов)
2. Рассчитайте радиусы вписанных в молекулы **1** и **2** сфер. (5 баллов)
3. Примерно оцените размер молекулы **3**. (5 баллов)
4. При сборке каркасов в присутствии лекарства такие молекулы включают его во внутреннюю полость. Рассчитайте соотношение **z(1):z(2):z(3)**, где **z** – отношение массы лекарства к массе оболочки. (5 баллов)

Считать, что:

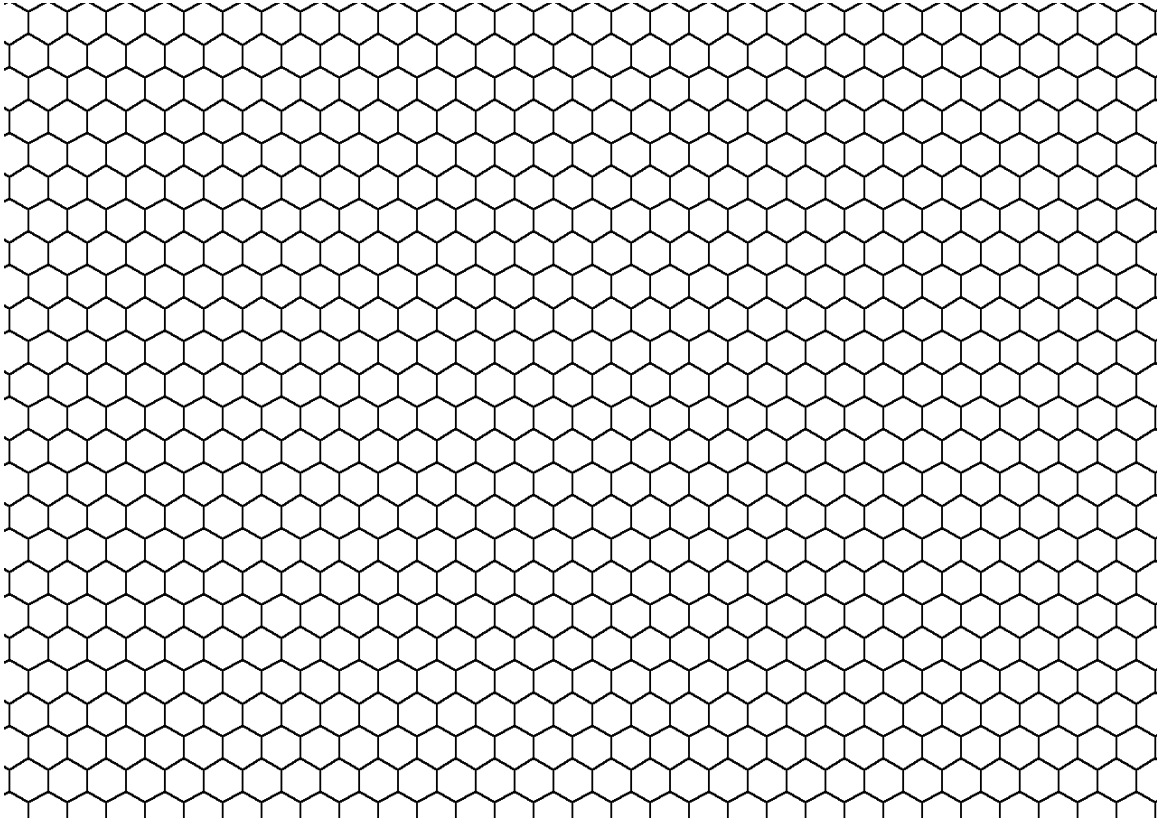
- расстояния X–X и X–Y равны **a = 1 нм**;
- $\angle XYX = 90^\circ$;
- для молекул **1** и **2** описанная сфера касается атомов **Y**, а вписанная – центров шестиугольных граней;
- для молекул **1** и **2** радиус внутренней полости равен полусумме радиусов вписанной и описанной сфер;
- молекулы лекарства занимают весь объем внутренней полости без промежутков.

Вспомогательная информация:

- Теорема Эйлера для выпуклого многогранника: $V - E + F = 2$, где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, ребер и граней многогранника.
- $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{3} \approx 1,7$, $\sqrt{5} \approx 2,2$, $\sqrt{7} \approx 2,7$, $\sqrt{11} \approx 3,3$
- $\sin 36^\circ \approx 0,59$, $\cos 36^\circ \approx 0,81$, $\text{tg} 54^\circ \approx 1,4$
- При расчетах π считать равным 3,1.

- Формула суммы квадратов последовательности натуральных чисел 1, 2, ..., n:

$$\sum_{m=1}^{m=n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



Всего – 20 баллов