Математика для школьников

Математика

Категория участников: школьники 7-11 классов

Блок теоретических заданий по **математике для школьников 7-11 классов** включает задачи разной сложности. Для повышения вероятности прохождения на очный тур Вам желательно решить задачи не только по математике, но и по физике, биологии, химии, чтобы набрать больше баллов. Все прошедшие на очный тур обязательно решают задачи по всем четырем предметам.

Задания

1. G-квадруплексы

Единичные нити ДНК* с определенным расположением гуанина **G** способны самопроизвольно сворачиваться в четырёхцепочечные спирали – обладающие повышенной устойчивостью G-квадруплексы, которые участвуют во многих жизненно важных процессах...

2. Тетраэдры и пирамиды

Два школьника получили одинаковые наборы шариков и задание: сложить из них модели тетраэдрических и пирамидальных нанокластеров так, чтобы ни одного лишнего шарика не осталось. Оба школьника с заданием справились...

3. Рост дендримера

Рост дендримера – макромолекулы с симметричной древообразной структурой с регулярными ветвлениями – происходит поэтапно, поколение за поколением. Число мономерных звеньев, присоединившихся к звену предыдущего поколения, называют коэффициентом ветвления **k**...

4. Пористый материал

Из некоторого вещества с истинной плотностью $\boldsymbol{\rho}$ = 3 г/см^3 получили пористый материал

M с удельной площадью поверхности пор $\mathbf{S}_{уд}$ = 500 м^2/г. Известно, что все поры материала **M** имеют форму цилиндров радиуса **r**, оси этих цилиндров параллельны...

5. Полые металлические кластеры

Поверхность полого высоко симметричного металлического кластера (ПМК) $\mathbf{M}_{\mathbf{N(n,m)}}$ можно представить в виде «выкройки» из плотноупакованного листа атомов металла M. Такая «выкройка» состоит из 20 одинаковых равносторонних треугольников...

6. ДНК для хранения информации: от теории к практике

Молекулы ДНК обладают одной из самых больших плотностей хранения информации. Недавно группа ученых предложила способ кодирования информации с использованием адресной записи в короткие последовательности нуклеотидов...

7. Золотые октаэдры

Атомы золота могут образовывать кластеры в форме: а) октаэдра **O** с ребром **n** атомов; б) правильного усеченного октаэдра **TO** с ребром **m** атомов и общим числом атомов. Сколько атомов золота приходится на каждую грань октаэдрического кластера с ребром в **n** атомов?..

8. Наноторы из нанотрубок: от больших к самому маленькому

Если вырезанную из листа графена фигуру свернуть и затем склеить по горизонтальному «шву» как показано на рис., то мы получим углеродную нанотрубку. Сгибая эту трубку и склеивая ее торцы, мы получаем углеродный нанотор...

9. Фуллерены

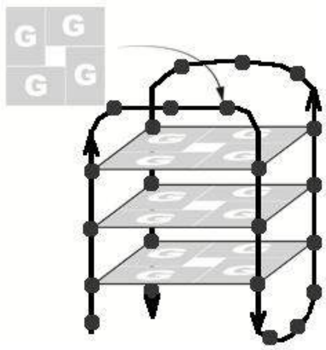
Молекулы фуллеренов представляют собой выпуклые многогранники, составленные из атомов углерода* и имеющие только пяти- и шестиугольные грани. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников...

10. Изомерия икосаэдрических фуллеренов

Любой икосаэдрический фуллерен можно представить в виде «выкройки» на графеновой плоскости. Общее число атомов при этом определяется по формуле. Изомерными называются молекулы икосаэдрических фуллеренов, имеющие одинаковое число атомов **N**...

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 1. G-квадруплексы

Единичные нити ДНК* с определенным расположением гуанина **G** способны самопроизвольно сворачиваться в четырёхцепочечные спирали – обладающие повышенной устойчивостью G-квадруплексы, которые участвуют во многих жизненно важных процессах и широко представлены во всех известных геномах. При этом четыре нуклеотида **G** из разных цепей образуют плоскую структуру, называемую G-квартетом (см. рис.).



1. Найдите вероятность того, что случайная последовательность ДНК фиксированной длины является G-квадруплексом с взаимным расположением G-квартетов и петель как на рисунке. Считать, что:
   - первый и последний символы в G-квадруплексе не являются гуанином;
   - все три петли G-квадруплекса а) могут содержать **G** **(2 балла)** и б) не содержат **G**. **(2 балла)**

2. Для случая (б) рассчитайте долю **G** в общем числе нуклеотидов нити ДНК, отвечающей G-квадруплексу. **(1 балл)** Во сколько раз она отличается от доли нуклеотидов **G** для случайной последовательности ДНК? **(1 балл)**

* Наследственную информацию в ДНК-последовательности можно рассматривать как строчку текста, записанную четырьмя буквами – **A**, **G**, **T**, **C**, которые отвечают четырем нуклеотидам.

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 1. G-квадруплексы

1. Рассчитаем общее число нуклеотидов в последовательности:

   1 + 3·4 (G-области) + 3·3 (петли) + 1 = 23.

   Такая нить ДНК может иметь 4^{23} варианта записи при помощи четырех букв нуклеотидов.

   а) Число возможных вариантов G-квадруплексов выбранной структуры равно произведению вариантов каждого из его фрагментов:

   $$3\cdot 1\cdot 4^3\cdot 1\cdot 4^3\cdot 1\cdot 4^3\cdot 1\cdot 3 = 9\cdot 4^9.$$

   По множителям:

   начало·G-область·петля·G-область·петля·G-область·петля·G-область·конец.

   Тогда вероятность

   $$P_a = \left(9\cdot 4^9\right)/4^{23} = 9/4^{14} = 3{,}35\cdot 10^{-8}.$$

   б) Число возможных вариантов G-квадруплексов:

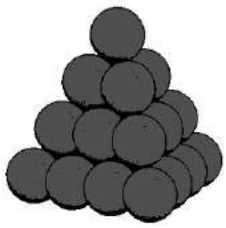
   $$3\cdot 1\cdot 3^3\cdot 1\cdot 3^3\cdot 1\cdot 3^3\cdot 1\cdot 3 = 3^{11}.$$

   Тогда вероятность

   $$P_a = 3^{11}/4^{23} = 2{,}52\cdot 10^{-9}.$$

2. Доля **G** в нити ДНК, отвечающей G-квадруплексу, составляет $\varphi_G = 12/23 \approx 0{,}52$. В свою очередь, доля **G** в случайной последовательности равна ϕ = 0,25 (все четыре «буквы» в этом случае равновероятны). То есть, $\varphi_G/\varphi = 0{,}52/0{,}25 = 2{,}08$.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 2. Тетраэдры и пирамиды



$$Td_n = (n^3 + 3n^2 + 2n)/6$$
$$P_n = (2n^3 + 3n^2 + n)/6$$

а *б* *в*

*Рис. Примеры моделей а) тетраэдрического Td_4 и б) пирамидального P_4 нанокластеров с длиной ребра **n** = 4 атома. в) Зависимости общего числа атомов в нанокластерах от длин их ребер.*

Два школьника получили одинаковые наборы шариков и задание: сложить из них модели тетраэдрических и пирамидальных нанокластеров так, чтобы ни одного лишнего шарика не осталось.

Оба школьника с заданием справились. Первый построил пять моделей нанокластеров: тетраэдрическую Td_7 и пирамидальные – P_x, две P_{2x} и P_{4x}. Второй школьник сложил восемь моделей тетраэдрических нанокластеров: пять Td_x, одну Td_{x+7} и две Td_{4x}.

Сколько шариков было в наборе?

Всего – 5 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 2. Тетраэдры и пирамиды

Запишем уравнение:

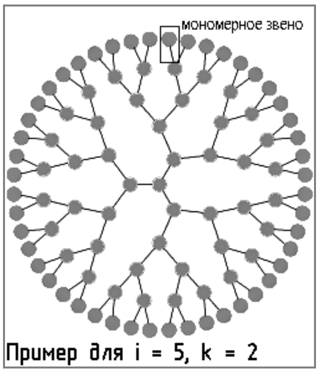
$$Td_7 + P_x + 2P_{2x} + P_{4x} = 5Td_x + Td_{x+7} + 2Td_{4x}$$

$$\begin{gathered}
\left(7^3 + 3\cdot 7^2 + 2\cdot 7\right)/6 + \left(2x^3 + 3x^2 + x\right)/6 + 2\left(2(2x)^3 + 3(2x)^2 + 2x\right)/6 + \left(2(4x)^3 + 3(4x)^2 + 4x\right)/6 = \\
= 5\left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)/6 + \left((x+7)^3 + 3(x+7)^2 + 2(x+7)\right)/6 + 2\left((4x)^3 + 3(4x)^2 + 2(4x)\right)/6 \\
504 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2\left(2(2x)^3 + 3(2x)^2 + 2x\right) + 2(4x)^3 + 3(4x)^2 + 4x = \\
= 5\left(x^3 + 3x^2 + 2x\right) + (x+7)^3 + 3(x+7)^2 + 2(x+7) + 2\left((4x)^3 + 3(4x)^2 + 2(4x)\right) \\
34x^3 + 72x^2 + 9x + 504 = 6x^3 + 132x^2 + 217x + 504 \\
28x^3 - 60x^2 - 208x = 0 \\
7x^3 - 15x^2 - 52x = 0 \\
x\left(7x^2 - 15x - 52\right) = 0,\ \sqrt{D} = \sqrt{15^2 + 4\cdot 7\cdot 52} = 41,\ x = \frac{15+41}{14} = 4
\end{gathered}$$

Всего в наборе $Td_7 + P_4 + 2P_8 + P_{16} = 84 + 30 + 2\cdot 204 + 1496 =$ **2018** шариков.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 3. Рост дендримера

Рост дендримера – макромолекулы с симметричной древообразной структурой с регулярными ветвлениями – происходит поэтапно, поколение за поколением. Число мономерных звеньев, присоединившихся к звену предыдущего поколения, называют коэффициентом ветвления **k**.



1. Найдите максимальный размер молекулы дендримера (радиус **R**, число поколений **i'**), схема ветвления которого все еще отвечает представленной на рисунке. **(3 балла)**

2. По какой причине дальнейший рост молекулы приведет к изменению величины **k**? **(1,5 балла)** Рассчитайте **k** для поколения **i'** + 1. **(1 балл)**

3. Выведите и постройте в виде графика общий вид зависимости **k**(**i**). **(2 балла)** Какова величина **k** для бесконечно больших молекул дендримера? **(1,5 балла)**

Примите, что:

– в любом поколении молекула дендримера имеет форму сферы;
– радиус дендримера с каждым поколением увеличивается на ***l*** = 1 нм;
– радиус области, занимаемой одним мономерным звеном на поверхности молекулы, равен **r** = 0,25 нм.

Всего – 9 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 3. Рост дендримера

1. Число мономерных звеньев в поколении **i** при условии постоянного значения величины коэффициента ветвления **k** = 2 равно $N_i = 3 \cdot 2^{i-1}$ (так как в первом поколении число мономерных звеньев равно трем).

   Общая площадь поверхности молекулы **i**-го поколения составляет $S = 4\pi R_i^2 = 4\pi (il)^2$.

   При этом одно мономерное звено занимает площадь $S_1 = \pi r^2 / \varphi = \pi r^2 / (\pi/4) = 4r^2$, где φ – доля площади, занимаемая кругом при плотном заполнении плоскости.

   Таким образом, максимальное число мономерных звеньев в **i**-м поколении составляет

$$N'_i = \frac{4\pi (il)^2}{4r^2} = \frac{\pi (il)^2}{r^2}.$$

   Максимальным поколением с **k** = 2 будет поколение, для которого еще выполняется условие

$$\frac{N'_i}{N_i} = \frac{\pi (il)^2 / r^2}{3 \cdot 2^{i-1}} \geq 1.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16,74	33,49	37,68	33,49	26,17	18,84	12,82	8,37	5,30	3,27	1,98	1,18	0,69

   Тогда $R_{i'=12} = 12 \cdot 1 = 12$ нм.

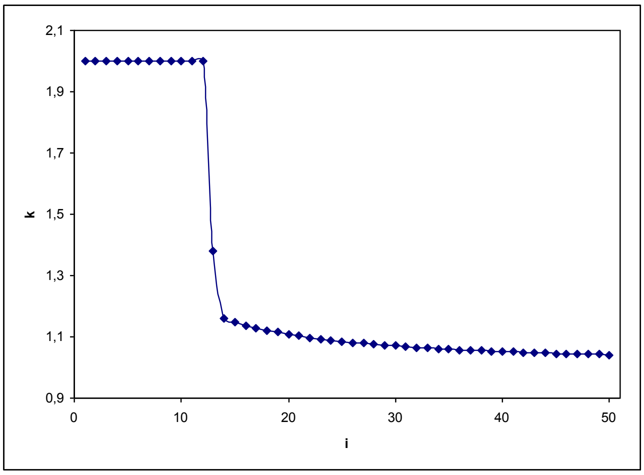
2. Для поколений с **i** > **i'** максимальное число мономерных звеньев, которое может быть размещено в слое, будет меньше, чем отвечающее условию **k** = 2. То есть, произойдет снижение величины коэффициента ветвления:

$$k_{13} = \frac{N'_{13}}{N_{12}} = \frac{8490}{6144} = 1{,}38.$$

3. Для $i \geq 14$ величина коэффициента ветвления составляет

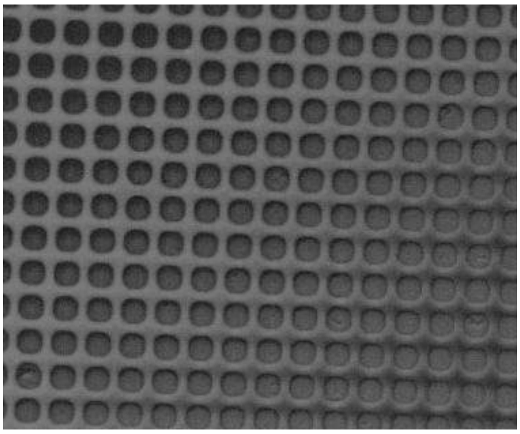
$$k_i = \left(1 + \frac{1}{i-1}\right)^2.$$

   Построим график зависимости **k**(**i**) на основании всех данных, полученных ранее:



Для бесконечно большой молекулы дендримера значение коэффициента ветвления будет стремиться к $\lim_{i\to\infty} k_i = 1$, то есть прирост ветвей будет происходить линейно, без разветвлений.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 4. Пористый материал



Из некоторого вещества с истинной[1] плотностью **ρ** = 3 г/см^3 получили пористый материал **M** с удельной[2] площадью поверхности пор $\mathbf{S_{уд}}$ = 500 м^2/г. Известно, что все поры материала **M** имеют форму цилиндров радиуса **r**, оси этих цилиндров параллельны и расположены друг относительно друга в вершинах квадрата со стороной 2,1**r**.

Рассчитайте **r** (в нм), общую удельную[2] длину пор $\mathbf{l_{п(уд)}}$ (в м/г), кажущуюся[3] (**ρ'**) плотность (в г/см^3) и величину пористости[4] **γ** материала **M**.

Подсказка: для удобства расчетов можно считать образец материала **M** кубом со стороной **a**.

[1] Истинная плотность – это масса единичного объема сплошного материала без пор.
[2] Удельная величина – это величина, отнесенная к единице массы образца.
[3] Кажущаяся (средняя) плотность – это масса единичного объема материала с учетом пор.
[4] Пористость – это величина, равная отношению суммарного объема пор к общему объему пористого материала.

Всего – 10 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 4. Пористый материал

По определению, пористость равна

$$\gamma = \frac{V_п}{V_{тв}+V_п} = \frac{(V_{тв}+V_п)-V_{тв}}{m/\rho'} = \frac{m/\rho' - m/\rho}{m/\rho'} = \frac{m(\rho-\rho')/(\rho\rho')}{m/\rho'} = \frac{\rho-\rho'}{\rho} = 1-\frac{\rho'}{\rho},$$

где $V_{тв}$ – объем твердого вещества, $V_п = \pi l_п r^2$ – суммарный объем пор, $V_{тв}+V_п = a^3$ – общий объем материала (как куб со стороной **a**).

То есть суммарный объем пор равен $V_п = \gamma(V_{тв}+V_п) = \gamma m/\rho' = \gamma a^3$.

Общая длина пор в кубе со стороной **a** равна $l_п = N\cdot a$, где N – общее число пор в кубе со стороной **a**.

В то же время, $N = \dfrac{a^2}{2{,}1^2 r^2}$ (отношение площади грани куба к площади, приходящейся на одну пору), то есть $l_п = \dfrac{a^3}{2{,}1^2 r^2}$.

Значит, $V_п = \pi l_п r^2 = \pi r^2 \dfrac{a^3}{2{,}1^2 r^2} = \pi\dfrac{a^3}{2{,}1^2}$, в то же время, $V_п = \gamma a^3$.

Выражая, получаем $\gamma = \dfrac{\pi}{2{,}1^2} = 0{,}71$.

Кажущаяся плотность равна $\rho' = \rho(1-\gamma) = 3(1-0{,}71) = 0{,}86$ г/см^3.

Так как общая длина пор $l_п = \dfrac{a^3}{2{,}1^2 r^2}$, то общая удельная длина пор равна $l_{п(уд)} = \dfrac{l_п}{m} = \dfrac{a^3}{2{,}1^2 r^2 m} = \dfrac{1}{2{,}1^2 r^2 \rho'}$. В то же время, удельная площадь поверхности всех цилиндрических пор составляет: $S_{п(уд)} = 2\pi l_{п(уд)} r$.

Тогда

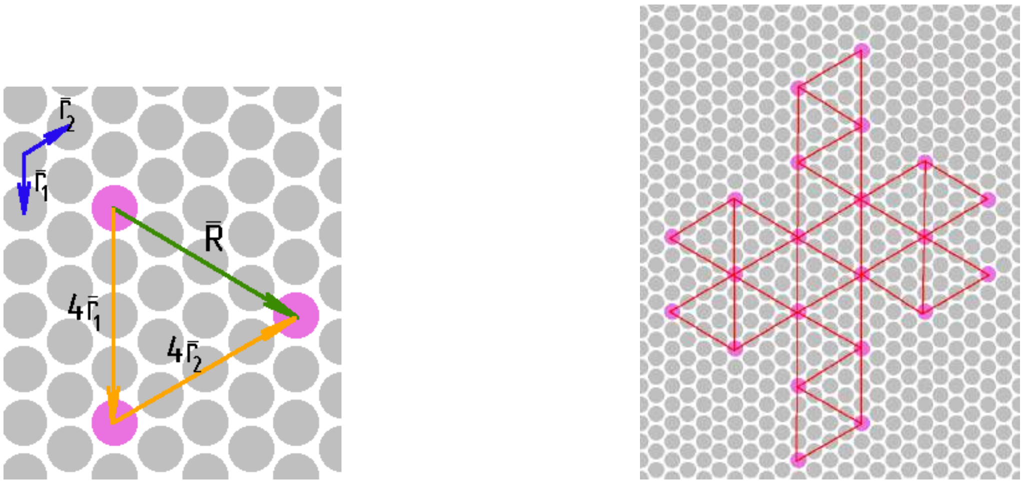
$$l_{п(уд)} = \frac{S_{п(уд)}}{2\pi r} = \frac{1}{2{,}1^2 r^2 \rho'} \text{ и } r = \frac{2\pi}{2{,}1^2 S_{п(уд)}\rho'} = \frac{2\pi}{2{,}1^2\cdot 500\cdot 0{,}86\cdot 10^6} = 3{,}31\cdot 10^{-9}\text{ м} = \underline{3{,}31}\text{ нм.}$$

$$l_{п(уд)} = \frac{S_{п(уд)}}{2\pi r} = \frac{500}{2\pi\cdot 3{,}31\cdot 10^{-9}} = \underline{2{,}41\cdot 10^{10}}\text{ м/г.}$$

или

$$l_{п(уд)} = \frac{1}{2{,}1^2 r^2 \rho'} = \frac{1}{2{,}1^2\cdot(3{,}31\cdot 10^{-9})^2\cdot 0{,}86\cdot 10^6} = \underline{2{,}42\cdot 10^{10}}\text{ м/г.}$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 5. Полые металлические кластеры



а *б*

*Рис. 1. Пример для (**n**,**m**) = (4,4): а) Единичные векторы r_1 и r_2, результирующий вектор $\vec{R} = 4\vec{r}_1 + 4\vec{r}_2$. б) Развертка, задаваемая вектором **R**: если вырезать по периметру фигуру развертки и, сгибая по красным линиям, склеить в замкнутую оболочку, то получится ПМК $\mathbf{M}_{\mathbf{N(4,4)}}$ (при этом, в местах склейки вершин атом металла вместо шести-координированного становится пяти- координированным).*

Поверхность полого высоко симметричного металлического кластера (ПМК) $\mathbf{M}_{\mathbf{N(n,m)}}$ можно представить в виде «выкройки» из плотноупакованного листа атомов металла M. Такая «выкройка» состоит из 20 одинаковых равносторонних треугольников (рис. 1). Чтобы однозначно ее выбрать, достаточно задать относительное расположение центров двух будущих пяти- координированных атомов M на листе, которое определяется вектором $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$ (суммой единичных векторов с коэффициентами **n** и **m**).

1. Сколько атомов металла содержит кластер $\mathbf{M}_{\mathbf{N(4,4)}}$? Ответ подтвердите расчетом. **(1 балл)**

2. Форму и симметрию какого многогранника имеют кластеры $\mathbf{M}_{\mathbf{N(n,m)}}$? **(0,5 балла)**

3. Оцените* размер ПМК $\mathbf{M}_{\mathbf{N(4,4)}}$ из атомов золота радиусом 0,144 нм. **(2 балла)**

4. Сколько атомов металла **N**(**n**,**n**) будет в ПМК $\mathbf{M}_{\mathbf{N(n,n)}}$ при произвольном значении **n**? **(1,5 балла)** Выведите формулу количества атомов **N**(**n**,**m**) для произвольных значений (**n**,**m**). **(3 балла)** Сколько пяти- и шести- координированных атомов (то есть, имеющих пять и шесть соседей, соответственно) содержит такой ПМК? **(0,5 балла)**

5. Каким образом надо расположить атомы углерода относительно атомов M в ПМК, чтобы они «сложились» в фуллерен**? **(0,5 балла)** Как относительно атомов M в исходном ПМК располагаются вершины, ребра и грани такого фуллеренового многогранника? **(0,5 балла)** Найдите <u>все</u> значения (**n**,**m**) для ПМК, которым отвечают самый маленький фуллерен C_{20} и бакибол C_{60}. **(2,5 балла)**

* Можно воспользоваться справочными формулами.
** Фуллерен - каркасная молекула из атомов углерода, каждый из которых связан ровно с тремя соседними, а сами эти связи формируют исключительно пяти- и шестиугольные грани.

Всего – 12 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 5. Полые металлические кластеры

1. **N**(4,4) = 162

   1 способ: 20·15 (грани) - 30·5 (ребра) + 12 (вершины).
   2 способ: как отношение общей площади к площади, приходящейся на один атом M.

2. Икосаэдр

3. Радиус описанной вокруг икосаэдра сферы $R_{ico} = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4} a_{ico}$, где длина ребра икосаэдра $a_{ico} = 8r_{Au}$, тогда радиус сферы, описанный вокруг золотого ПМК $R = R_{ico} + r_{Au} = 2\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}r_{Au} + r_{Au}$ (так как радиус-вектор соединяет центры атомов золота).

   R = 1,24 нм, размер 2,48 нм.

4.
   1) **N**(**n, n**) = 10**n**^{2} + 2 – как **n**-я оболочка икосаэдрического кластера.

   2) Число атомов в ПМК с произвольными (**n**,**m**) находим как число атомов M, приходящихся на площадь поверхности соответствующего икосаэдра, с учетом поправки для атомов вершин (в сумму площадей они входят как 20·(1/6)·3 = 10 вместо 12).

   $$N(n,m) = \frac{S_{ico}}{S_M} + 2 = \frac{20S_\Delta}{S_M} + 2 = 10\left(n^2 - nm + m^2\right) + 2$$

   Здесь $\mathbf{S_{ico}}$ = 20$\mathbf{S_\Delta}$ – площадь икосаэдра, $\mathbf{S_\Delta}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\vec{R}\right|^2$ – площадь треугольной грани икосаэдра, $\mathbf{S_M}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\vec{r}\right|^2$ – площадь, приходящаяся на один шести-координированный атом металла, $\left|\vec{r}\right| = \left|\vec{r}_1\right| = \left|\vec{r}_2\right|$ – длина единичного радиус-вектора.

   Выражение для нахождения длины вектора $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$:

   $$\left|\vec{R}\right|^2 = \left|n\vec{r}_1\right|^2 + \left|m\vec{r}_2\right| - 2\left|n\vec{r}_1\right|\cdot\left|m\vec{r}_2\right|\cos\left(60^\circ\right) = n^2\left|\vec{r}\right|^2 + m^2\left|\vec{r}\right|^2 - 2\left|\vec{r}\right|^2 nm\cdot(0{,}5) = \left(n^2 - nm + m^2\right)\left|\vec{r}\right|^2$$

   3) Число пяти- координированных атомов постоянно и равно 12, число шести-координированных составляет 10(**n**^{2} – **nm** + **m**^{2}) – 10.

5.
   1) Надо между тремя касающимися друг друга атомами M расположить по атому углерода, тогда:

      – шести- координированные атомы M будут в центрах шестиугольных граней фуллеренового многогранника, пяти- координированные – пятиугольных;
      – ребра фуллерена будут перпендикулярны «ребрам» (линии контакта атом металла – атом металла) в ПМК **M**.

2) C_{20}: 12 пятиугольных граней => 12 пяти-координированных атомов в ПМК => два способа выбрать пару индексов ПМК – (1,1) и (1,0) ($\mathbf{n}^2 - \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 1$).

   C_{60}: 20 шестиугольных и 12 пятиугольных граней => 32 атомов в ПМК => $10(\mathbf{n}^2 - \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) + 2 = 32$, $\mathbf{n}^2 - \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 3$ => (2,1): $4 - 2 + 1 = 3$.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 6. ДНК для хранения информации: от теории к практике

Молекулы ДНК обладают одной из самых больших плотностей хранения информации. Недавно группа ученых предложила способ кодирования информации с использованием адресной записи в короткие последовательности нуклеотидов. Например, ученые смогли закодировать в ДНК, а затем успешно прочесть разнообразные файлы с данными, включая 3 изображения (рис. 1) и даже операционную систему. Такой способ позволяет быстро находить и считывать только нужные фрагменты данных, не требуя технически сложно реализуемых чтения и записи длинных молекул ДНК.

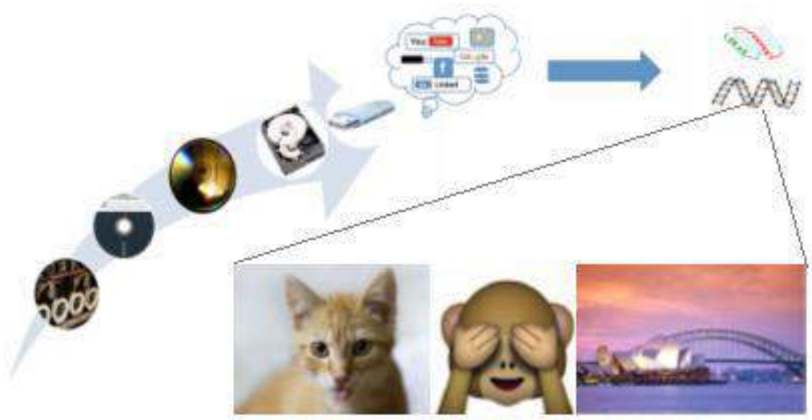


Рис. 1

Рассмотрим пример использования такого способа кодирования информации (рис. 2). Файл, состоящий из логических нулей и единиц, кодируется последовательностью нуклеотидов, записанной 4 буквами (A, C G, T), которая содержит такое же количество информации. Эта последовательность затем разбивается на строки, содержащие не более 192 нуклеотидов (блок II, рис. 2). Порядковый номер строк (начиная с 0) называется адресом и кодируется в последовательности из 8 нуклеотидов (блок I, рис. 2), для этого он записывается в двоичном виде и кодируется тем же кодом, что и остальные данные.

```
                              ...
{0,1} → {A,C,G,T} → [ GTGACTAC CAACTCTATG ... TATATTA
                        (I)             (II)
                              ...
```

Рис. 2

1. Найдите, какой максимальный объем файла (в мегабайтах) можно закодировать таким способом. **(2 балла)**

Далее приведены все прочтенные ДНК-цепочки (расположенные в случайном порядке), отвечающие некоторому файлу-изображению.

2. Сколько строк и символов нуклеотидов содержит такая запись файла, **(1 балл)** рассчитайте размер (в байтах) исходного файла изображения. **(1 балл)**

3. Сколько возможных вариантов нуклеотидного кода существует для такой записи файла? **(1 балл)** Установите, каким вариантом кода было закодировано изображение. **(3,5 балла)**

4. Напишите программу*, с помощью которой можно будет раскодировать эту ДНК-запись изображения, и опишите вкратце алгоритм ее работы. Что изображено на закодированной картинке? **(8,5 баллов)**

* Программу можно написать на любом языке программирования, но обязательно приведите ее исходный код и полученный файл **image.png**.

Учтите, что в файл изображения **image.png** по мере раскодирования необходимо записывать не *текстовые символы* «0» «1», а *двоичные коды:* «0» «1» (при этом размер файла должен соответствовать рассчитанному в п.2). Если нет ответа на вопрос 3, то при раскодировании файла переберите все возможные варианты кодировок: только верный вариант кода позволит открыть и увидеть картинку.

Приведенные ниже последовательности можно скачать в виде текстового файла **image.txt** (архив: http://enanos.nanometer.ru/uploads/archive/image.zip).

GGGGGGTGCTGTGAGCGCGCGGACCGGCCGAGTATCCCCTATTCTAAATAAGAACTCTTTTGTCACCATTATACTAACT
GAATATTCCCGCGAGGGCGTTTCGTACCCTTCGAAGGATCACTCATTCATCCGGATTTAAGCAAGACGTGAACAGTTCTG
TCAGACGTCTCTCGACCTGTCAGTCTCTTCTTGGCGGTGGA

GGGGGGATCGGCGGCTTCACTACTCTACAACCAACAACGGACGGCTACCAAGGGTGTAGAGCGATAGAGGCAACAACCC
CTAGACCTAGCCACGCAACAACCTGACCTTGACAGGCCCGCGCGGTAGAAGGCTTTATAATTCGAGCTTGCCTAGTAGAC
TGGTAGATTAGCGCAGTACGGGGCCGCAATAAGTTCCGGTA

GGGGGCGTGGGGGGGGGGGGGGGGCGTCCGCCCGATCGCGTTATCGGTCTGGTGGT

GGGGGGAGAATCGTAAAGACGGTGCCTCATCACAAACTTCCCAGAAGAGTCGCCGAGCTCGGCTTCAGTCGGAGTTTAG
GTGCGGGTGTTTCACAGGCTGGCCCCCGTGCTCGAGTGTTTCGTAGCTTCCTCACGTTGTGGGTGTTTCGTGTCGGTTTT
TAGTGGACGTTCGACCTCACCCTACGACCCAAGCTACTAGA

GGGGGGGAGGTTTTTCGGAGCATCACACAGTCTCGTCGCTTCATCAATCGCCGACTAACCAACGCGTATCCAATCAAAG
AACTCGAACAATCCACCTAACGGCTGACCCGGCGCACCCAATGCATGTGGAATCATGCGTATACGGGGCTAATACGCCAG
CGGGAATCTCGGCCGAGTTTATGGCTGATAATGTAAGAGTA

GGGGGGCGTCCTTTTCTTATGACCGGTGCCTGGTTCCCTGCTCGCCGCACCTTACAATGGCACAATGCGGTTAACAATC
TCTTGCAATTCGGCAATTGTGAAAGGCGCGTGACACCGGGAATCCGACATCACAATATTTCTGGATGGGTTTGTCTCTAT
GCTAGAGACTGTGCGGATAGCCGATCATTACCTGCCTCGTC

GGGGGGCTTAGGATCGTGGTATCACCGATTCTAAGACTGTCCCCGCTCATGGCATTGAGTCGCCAACTTGGAGGTGCCC
TCCCCCCCCCCCCACCCATTCCACGGCTTGCTTCACGCGTATTCTAGATCCCAGGATCGTATCTTAACGGGCAAGATAAT
CCTCATGGCCCGCTAAGAGATGGGGCGGTGAGCCGGAGCAT

GGGGGGCAAAAGGGCATTGCAAGAGCTTGTCGGTAGGAACTTAGTTTCCTAACTTCCAAGAAGAGGCGGATGCCCCGCG
GGTCAGACTAATTGTTTCACTTTAGTCAAACGCGAGACTTAGTGTTTAAAGCGAATCGCCCTCAGCGCGGATCTCCAACA
ATATGCCGGTCACCTCAGAGTTCATGTGCCCAATAGAAGCG

GGGGGGAACAGCTCGGGGGACATTGCACACGGATCTGGATGCCTTCTAGTGGATCTGTTTGACCCCCTACTGTATCTGC
AGGTGGAACTATGGCTCCTATTGGTGTGTTCGCGCCGGAAGCTTCGGCCGCGGATATGGATGGCCCCGTAGCGTATAGCG
TTGAGGACCCCAAAATCGGCCGCCCGTTGATGCTTAGTAGC

GGGGGCGCTTGTGTGACGGCACCATCGGTCGACTGGTCGTCCGCTGTTTGGCAAATCACTTAGAACGATTAGACTACAA
AGGCTATACCGCCTCCTTCGGAGTAATCCGGGTTACTGTTCAATTCGGCTCGCGCACGTCCCCTCTTCATGTTCTAGCGG
CCAATGGGCCCATTTGACTATAGTGCCGGCATGATTCTGGA

GGGGGGTCACAGTACCACAACTTAGGATGTTCAAGAAACGGAGTTAGATTCAGATCGAGATCCCGAATGCAAAGCGATA
CACGAAGATTAGGGCAGAGTTAGTGCTTGCACGTTTTTTCGCCGAAGATATACACCCACTACCGTTAAGACGTGCTCTTC
CCAGGTCCTAGTGCTTAAGGCGGGAACGAAACGAGCATATT

GGGGGGTTTTATATTATATTTATTATAACACCTATCGGACTGAACCGTAATCCACGTGTTTGAACTCTACATCTCGCC
TACTGAATATTCCATGAGCCCTACAAAAGTGACTCTAACACTGTCTCTATAACACTCTTTAATATATGGCCGCACATTCC
CCTTAGAGCCGGAGCATGAGGTTTGACGTGAATAAACCCGC

GGGGGGTATGAGTGATACACTACCTGAATTCTTATCATGGGGCGAAACTTTGGCTAATTCTCACCGAAAGCGATTGCAC
GCGCCTATGCCTGTCAGTGAGCCGCAGTTCATCGCCAGGGACCAAACCACTTAAACGCGATCTAGGATTTTGAACGATCC
CGACGAATCGACCGTGCCGGATCGCCCAAGCGAGAGTGCCG

GGGGGGGCGAGGGGAGCCCCGGAGGGAAGCTCCAGATGGGGCAGTTGACGTACGCTGGCAGCACCATATGACAATGGCG
TCGCCGGGCGGGACGCCATAACCGGAATGGTAGCGCCGAAGATCTGTGTGAACCGGGAGCTCGAGCACCGGCAGGGATGG
TGTTTCCGCGCCGGTACAGTCGAAATCCTCGCGGCGGAGTG

GGGGGGACGAGCTGTGCATACTTGTACCTTACCTAACTGTGTCAAGGCGTGCAGAGTTATCGGGAATACGACATGACAA
CATCTGCGCCGCAGAGCGGCAGAGTTCCCAGGCGCATGTTGACCTCCTTGTGATATTTAATTATGGACAGTGTAAGGCCG
TGAGATACCTTATATTATACTCTACCGGCTGAGAACGACCC

GGGGGCGGGACTCCGAGATCGGTATACCTCCTCGTAAATGGTGCGTCCTAGCAGGGTTTACTGGTCGTTATCGCAGAAT
GCGATTCTTACTCTGAAGCCATCGTGTGGGTCTCTGGTTCCTAGCGCAGGTTCTGGACGTCTGGGCGCGCCGGTAGGCCT
GATGCTGTCATGTAAGAGCTCCGGCCTCGTTGTGTCAGGTA

GGGGGGGGTGTCCCGGCGATCGCAGGACGGTTGCTTGGTTGGGGGGGGGGGGGGACCGTCCGTGCGCGCCGTGGGGGGG
GGGGGTCAGGGGGGGGGGGGGAGGGGTGGGGTGGGGGGGGGGGGGCTTAGGCGTGCGTGAAGGGGGGGGGGGAGAGACGT
CCGCGCGGCCCCGCATGACTTATACCCTAGATACTATAGGA

GGGGGGGTGACTGTACTCGCATAATCGCTCCGGTCCGTCATATATAATATAATCCCGGTGGTAAGTTCGGCGGGGTGTG
CCCCCCTCGGGGACCGTATTTACCTTAACGATCGGTTGCAGTATGGCAGTCTTCTAAAAGACAGGGTCCTGTGCCTCCCC
TCGTCTTCTCAGTGCGGGACATACTTGCGCCCGTGCTTAAG

GGGGGGCCTTGGTAATTATAATTTCGCACATGGCACCCTAAATCCCGATGTTCAAATTTCCATGAGTCAAGAAATCGCA
GTGCAAGCCATTAACTATCTACCGTCTTTTAAAACAAGAAAGCATGGAATTCCACCGAGCAAATAGATAATCCTTATCGG
AAAGACTACGCGCCATCCTAATGATGTATACTCTCTTGTCG

Всего – 17 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 6. ДНК для хранения информации: от теории к практике

Рис. 1

1. Поскольку существуют 4 буквы нуклеотида, то один нуклеотид будет кодировать 2 бита информации, 192 нуклеотида кодируют 192·2 = 384 бит информации.

   Сколько описанных в условии строк можно закодировать таким способом? - Столько же, сколько чисел можно закодировать 8·2 = 16 битами, т.е. суммарно $2^{16} = 65536$ строк (или по-другому: максимальный номер строки будет $1111111111111111_2 = 65535$; всего строк, с учетом нулевой, будет 65536). Следовательно, объем информации (в МБ) составит 384·65536/8/1024/1024 = **3 Мегабайта**.

2. Файл содержит **19** строк, из которых 18 полных (содержат, как указано в условии, 200 символов нуклеотидов, визуально их длина одинакова) и одна неполная из 76 нуклеотидов, следовательно, запись файла состоит из 200·18 + 56 = **3656** символов нуклеотидов, из которых информацию кодируют 3656 – 19·8 = 3504. Поскольку каждый символ кодирует 2 бита информации, то исходный файл имеет размер 3504·2/8 = **876 байт**.

3. Столько же, сколько вариантов сопоставить значения 1 бита (00 01 10 11) нуклеотидам (A C G T), т.е. 4! = **24**.

   Расшифруем код, зная, что в адресах строк закодированы цифры от нуля до 18 (19 строк). Самая короткая последовательность – это, очевидно, самая последняя строка. Поскольку всего 19 строк, то ее номер 18, следовательно:

   $$18 = 10010_2 \Rightarrow 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ \underline{01\ 00\ 10}_2 \Leftrightarrow \text{G G G G G } \underline{\text{C G T}}$$

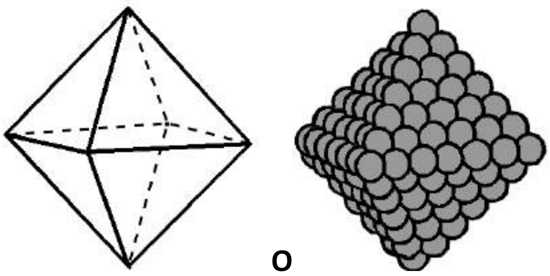
   Следовательно, C = 01, G = 00 и T = 10 (A = 11 методом исключения).

4. Алгоритм. Читаем последовательно строки из файла **image.txt**, раскодируем согласно найденной в предыдущем пункте таблице соответствия, разделяем строку на номер и данные. Записываем данные в ячейку массива с номером строки. После прочтения всех строк перебираем последовательно строки массива, записывая данные в двоичном виде в файл **image.png**, который можно открыть в любой программе, умеющей читать распространенные графические файлы. Это – упрощенный логотип 12-й олимпиады (см. заглавный рисунок).

Исходный код программы (PascalABC.NET http://pascalabc.net/):

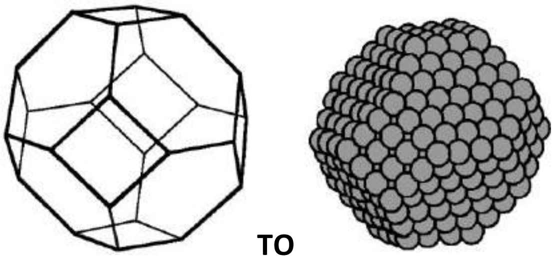
```
var
  { для упрощения программы считаем, что строк не более 256 }
  P : array[0..255] of string;
  txt : text;
  png : file;
  s : string;
  {переменная с двоичным кодом, соответствующим последовательности нуклеотидов}
  b : byte;

procedure decode(nuc: char);
begin
{ (b shl 2) к двоичной записи b, добавляет справа 2 нуля, затем мы по сути «добавляем» (справа) двоичный код нуклеотида nuc. Важно отметить, что поскольку переменная b имеет тип byte, то в ней не может "храниться" более 1 байта = 8 бит, т.е. 4 нуклеотидов; последующее «добавление» нуклеотидов по сути "затирает" двоичный код крайнего нуклеотида слева и добавляет двоичный код нового нуклеотида справа: выполнение decode для 4-х нуклеотидов полностью «вытесняет» из нее информацию о предыдущих 4-х нуклеотидах, чем мы далее воспользуемся чтобы не обнулять каждый раз переменную b (поскольку информация о номерах строк и данные состоят из целого количества байт, следовательно закодированные номера строк и информация в строках записаны кратным 4 числом нуклеотидов). }
 case nuc of
  'A': b := (b shl 2) + 3; {A<=>11 т.е 3}
  'C': b := (b shl 2) + 1; {C<=>01 т.е 1}
  'G': b := (b shl 2) + 0; {G<=>00 т.е 0}
  'T': b := (b shl 2) + 2; {T<=>10 т.е 2}
 end;
end;

begin
    { построчно читаем файл image.txt и создаем массив P, в котором номер элемента равен номеру строки, а его значение - кодирующая данные последовательность }
assign(txt, 'image.txt');
reset(txt);
while not eof(txt) do
 begin
  readln(txt, s);          { читаем построчно 'image.txt' }
  for var n := 5 to 8 do decode(s[n]); { декодируем 4 нуклеотида номера }
  P[b] := copy(s, 9, 200); { заносим в массив P строку под декодированным №b }
 end;
assign(png, 'image.png');
rewrite(png);
       { перебираем массив P пока в нем есть непустые строки }
foreach s in P do
  for var n:= 1 to length(s) do  { перебираем символы нуклеотидов строки }
    begin
     decode(s[n]);
     {"заполненную" новой четверкой нуклеотидов переменную b пишем в файл}
     if n mod 4 = 0 then write(png, b);
    end;
end.
```

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 7. Золотые октаэдры



O

а



TO

б

Атомы золота могут образовывать кластеры в форме:
а) октаэдра **O** с ребром **n** атомов и общим числом атомов $O(n) = (2n^3 + n)/3$;
б) правильного усеченного октаэдра **TO** с ребром **m** атомов и общим числом атомов $TO(m) = 16m^3 - 33m^2 + 24m - 6$. На рисунке приведены примеры для **n** = 7 и **m** = 4.

1. Сколько атомов золота приходится на каждую грань октаэдрического кластера с ребром в **n** атомов? **(0,5 балла)** Выведите общую формулу для числа атомов в поверхностном слое золотого октаэдра **S_O**(**n**). **(1,5 балла)**

2. Форму каких многоугольников имеют грани усеченного октаэдра? **(0,5 балла)** Сколько атомов золота приходится на каждый из них для кластера **TO** с ребром в **m** атомов? **(1,5 балла)** Выведите общую формулу для числа атомов в поверхностном слое золотого октаэдра **S_{TO}**(**m**). **(2 балла)**

3. Как правило, при близком общем числе атомов золота более предпочтительной является форма кластера, имеющая меньшую площадь поверхности. Рассчитайте доли поверхностных атомов* для усеченного октаэдра с ребром **m** = 5 и для октаэдра, усечением которого он получен, и сделайте вывод, какая форма кластера золота будет более предпочтительной. **(3 балла)**

* Доля поверхностных атомов – отношение числа поверхностных атомов к общему числу атомов.

Всего – 9 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 7. Золотые октаэдры

1. Грань октаэдрического кластера – правильный треугольник, значит, число атомов золота, приходящееся на нее, равно треугольному числу: $A(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Общее число атомов в поверхностном слое кластера **О**:

   $S_o(n)=8A(n)-12n+6$ (атомы на 8 треугольных гранях с ребром n минус повтор атомов на 12 ребрах плюс атомы в 6 вершинах, которые мы сначала четырежды прибавили с атомами на гранях, а затем четырежды вычли вместе с атомами на ребрах)

   или $S_o(n)=6+12(n-2)+8A(n-3)$ (атомы в 6 вершинах плюс атомы на 12 ребрах без учета вершин плюс атомы на 8 гранях без учета вершин и ребер, посчитанных ранее).

   Упрощая, получаем: $S_o(n)=4n^2-8n+6$.

2. Грани, появившиеся на месте отсечения пирамидок, имеют форму квадратов с числом атомов золота $B(m)=m^2$. В свою очередь, грани, получившиеся усечением треугольников исходного октаэдра, имеют вид правильных шестиугольников. Число атомов, приходящееся на них, будет равно разности числа атомов в «исходном» треугольнике и суммарного числа атомов в «отсеченных» треугольниках:

   $$C(m)=A(3m-2)-3A(m-1)=\frac{(3m-2)(3m-1)}{2}-3\frac{(m-1)m}{2}=3m^2-3m+1.$$

   Общее число атомов в поверхностном слое кластера **ТО**:

   $S_{to}(m)=6B(m)+8C(m)-36m+24$ (атомы на 6 квадратных (бывшие вершины октаэдра) и 8 шестиугольных (бывшие грани октаэдра) гранях минус повтор атомов на 36 ребрах (12 ребер октаэдра + 6·4 = 24 ребра, образовавшиеся при усечении вершин октаэдра) плюс атомы в 24 вершинах **ТО** (на месте каждой из 6 вершин октаэдра образовалось 4), которые мы сначала трижды прибавили с атомами на гранях, а затем трижды вычли вместе с атомами на ребрах)

   или $S_{to}(m)=6B(m)+12(m-2)+8C(m-1)$ (атомы на 6 квадратных (бывшие вершины октаэдра) плюс атомы на 12 бывших ребрах октаэдра без учета вершин плюс атомы на 8 шестиугольных гранях (бывших гранях октаэдра) без учета атомов, посчитанных в двух первых слагаемых)

   или $S_{to}(m)=24+36(m-2)+6B(m-2)+8C(m-1)$ (атомы в 24 вершинах **ТО** (на месте каждой из 6 вершин октаэдра образовалось 4 вершины **ТО**) плюс атомы на 36 ребрах (12 ребер октаэдра + 6·4 = 24 ребра, образовавшиеся при усечении вершин октаэдра) плюс атомы на 6 квадратных и 8 шестиугольных гранях без учета вершин и ребер, посчитанных ранее).

   Упрощая, получаем: $S_{to}(m)=30m^2-60m+32$

3.

1) $\dfrac{S_o(n)}{O(n)} = 3\dfrac{4n^2 - 8n + 6}{2n^3 + n}$, $\mathrm{n} = 3\mathrm{m} - 2 = 15 - 2 = 13$

$$\frac{S_o(13)}{O(13)} = 3\frac{4 \cdot 13^2 - 8 \cdot 13 + 6}{2 \cdot 13^3 + 13} = 3\frac{578}{4407} = \frac{578}{1469} = 0{,}39$$

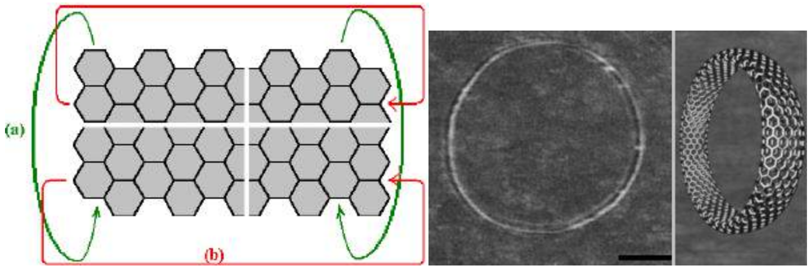
2) $\dfrac{S_{to}(m)}{TO(m)} = \dfrac{30m^2 - 60m + 32}{16m^3 - 33m^2 + 24m - 6}$

$$\frac{S_{to}(5)}{TO(5)} = \frac{30 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 + 32}{16 \cdot 5^3 - 33 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 - 6} = \frac{482}{1289} = 0{,}37$$

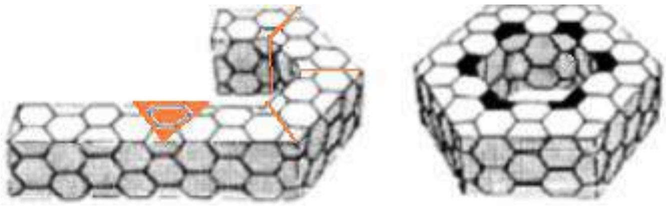
3) $\dfrac{S_{to}(5)}{TO(5)} < \dfrac{S_o(13)}{O(13)}$

Следовательно, усеченный октаэдр – более предпочтительная форма кластера. То есть, несмотря на то, что мы уменьшаем число атомов в кластере (что для однотипных кластеров приводит к росту доли поверхностных атомов, см. $S_o(n)/O(n)$), при переходе от октаэдра к его усеченной форме мы наблюдаем снижение этого показателя, что свидетельствует о большей стабильности **ТО**. И, действительно, начиная с некоторого размера, для кластеров золота форма усеченного октаэдра становится более предпочтительной.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 8. Наноторы из нанотрубок: от больших к самому маленькому



(1)



(2)

Если вырезанную из листа графена фигуру (рис. 1) свернуть и затем склеить по горизонтальному «шву» как показано на рис. 1 (а), то мы получим углеродную нанотрубку. Сгибая эту трубку и склеивая ее торцы (рис. 1 (б)), мы получаем углеродный нанотор, состоящий исключительно из шестиугольных граней.

Для любых торов величина **χ** = **V** – **E** + **F** (где **V**, **F**, **E** – количество вершин, граней и ребер, соответственно), называемая Эйлеровой характеристикой, является постоянной.

1. Допустим, нанотор (**1**) содержит **m** шестиугольников. Рассчитайте, сколько вершин **n** и ребер **E** он имеет. **(1 балл)** Найдите **χ** для тора. **(1 балл)**

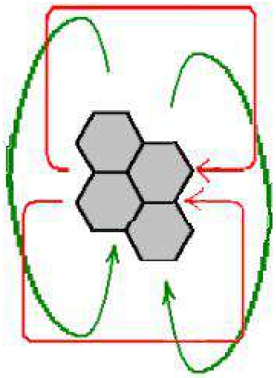
2. Выведите формулу, описывающую в общем виде зависимость **n** для произвольного нанотора, содержащего пяти-, шести- и семиугольные грани, от числа граней каждого типа. Основываясь на полученном значении **χ**, определите, существуют ли для наноторов (как в случае фуллеренов) ограничения на количество нешестиугольных граней? **(2 балла)**

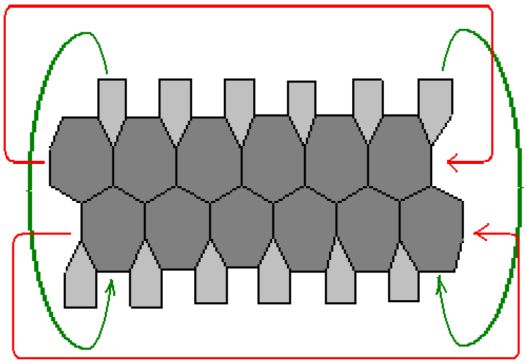
Хотя при получении нанотора (**1**) склейка (а) листа графена в нанотрубку не меняет длины ребер в шестиугольниках, склейка (б) невозможна без их искажения. Однако, если из нанотрубки удалить 6 сегментов, как показано на рис. 2, то можно получить тор (нанотор (**2**)) без искажений длин ребер. При этом в местах удаления сегментов образуются пяти- и семиугольники, число которых будет постоянно для всех наноторов такого типа (см. задачу, «Углеродный нанобублик»).

3. Установите формулы (число атомов углерода) самых маленьких торов первого и второго типов. **(2 балла)** Постройте их развертки на плоскости (как показано на рис. 1). **(4 балла)**

Всего – 10 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 8. Наноторы из нанотрубок: от больших к самому маленькому


(1)


(2)

1.

1) Каждая шестиугольная грань имеет 6 вершин, но каждая вершина принадлежит одновременно трем граням: $\mathbf{V} = \mathbf{n} = 6/3\mathbf{m} = 2\mathbf{m}$.

2) Каждая шестиугольная грань имеет 6 ребер, но каждое ребро принадлежит одновременно двум граням: $\mathbf{E} = 6/2\mathbf{m} = 3\mathbf{m}$.

3) Подставляя полученные ранее величины, получаем $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{m} + \mathbf{m} = 0$. (Сравните с $\boldsymbol{\chi} = 2$ для выпуклых многогранников, в частности, для фуллеренов).

2. Запишем общее число граней $\mathbf{F} = \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7$.

Тогда, аналогично п.1: $\mathbf{E} = 5\mathbf{F}_5/2 + 6\mathbf{F}_6/2 + 7\mathbf{F}_7/2$ и $\mathbf{n} = \mathbf{V} = 5\mathbf{F}_5/3 + 6\mathbf{F}_6/3 + 7\mathbf{F}_7/3$.

Запишем выражение, описывающее Эйлерову характеристику для тора:

$$5\mathbf{F}_5/3 + 6\mathbf{F}_6/3 + 7\mathbf{F}_7/3 - (5\mathbf{F}_5/2 + 6\mathbf{F}_6/2 + 7\mathbf{F}_7/2) + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7 = 0$$
$$5\mathbf{F}_5/3 + 2\mathbf{F}_6 + 7\mathbf{F}_7/3 - 2{,}5\mathbf{F}_5 - 3\mathbf{F}_6 - 3{,}5\mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7 = 0$$
$$5\mathbf{F}_5/3 + 7\mathbf{F}_7/3 - 2{,}5\mathbf{F}_5 - 3{,}5\mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_7 = 0$$
$$10\mathbf{F}_5 + 14\mathbf{F}_7 - 15\mathbf{F}_5 - 21\mathbf{F}_7 + 6\mathbf{F}_5 + 6\mathbf{F}_7 = 0$$
$$\mathbf{F}_5 - \mathbf{F}_7 = 0.$$

Таким образом, число шестиугольных граней может быть произвольным, ограничений на него не накладывается, число пятиугольников равно числу семиугольников.

3.

1) Тип (**1**). Чтобы склейка была ровной, число шестиугольников в «выкройке» по каждому из направлений должно быть четным. Таким образом, минимальное число шестиугольников – 4, тогда число вершин $\mathbf{V} = 2\mathbf{F}_6 = 8$. Отметим, что в реальности такой тор не может существовать из-за огромных искажений С-С связей. Развертку см. рисунок в начале.

2) Тип (**2**). Шесть «удаляемых» сегментов дают нам $\mathbf{F}_5 = \mathbf{F}_7 = 6{\cdot}2 = 12$ граней каждого типа. Тогда $\mathbf{V} = 5{\cdot}12/3 + 6\mathbf{F}_6/3 + 7{\cdot}12/3 = 48 + 2\mathbf{F}_6$. Наименьшее число шестиугольных граней равно нулю, тогда число атомов углерода составит $\mathbf{n} = 5{\cdot}12/3 + 7{\cdot}12/3 = \underline{\mathbf{48}}$. Таким образом, минимальный нанотор без искажений связей имеет формулу $\mathbf{C_{48}}$ и состоит целиком из 12 пятиугольных и 12 семиугольных граней. Очевидно, что семиугольные грани находятся «внутри» бублика, а пятиугольные – «снаружи», следовательно, комбинируя их можно построить развертку (см. рисунок в начале).

Математика

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 9. Фуллерены

Молекулы фуллеренов представляют собой выпуклые многогранники, составленные из атомов углерода* и имеющие только пяти- и шестиугольные грани. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, рассчитайте, сколько одинарных и двойных связей, а также пяти- и шестиугольников имеют фуллерены C_{2017} и C_{2018}.

* Каждый атом углерода образует две одинарных и одну двойную связь с соседними атомами.

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Фуллерены

1. Обозначим **V** = **n** – число вершин, тогда число ребер **E** = 1,5**V** = 1,5**n** (в каждой вершине сходится по 3 ребра, но каждое ребро принадлежит двум вершинам).

   а) **n** = 2017: **E** = 3025,5 – ответ не имеет смысла, возможно, данный фуллерен не существует.

   б) **n** = 2018: **E** = 3027, из них одинарных $\mathbf{E}_1$ = 2/3 **E** = 2018 и двойных $\mathbf{E}_2$ = 1/3 **E** = 1009.

2. Общее число граней можно записать как $\mathbf{F} = \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6}$.

   Выразим число вершин через число граней: $\mathbf{V} = 5/3\mathbf{F_5} + 6/3\mathbf{F_6}$ (каждая пяти- (шестиугольная) грань дает 5 (6) вершин, но каждая вершина принадлежит трем граням). Тогда число ребер $\mathbf{E} = 1{,}5(5/3\mathbf{F_5} + 2\mathbf{F_6}) = 2{,}5\mathbf{F_5} + 3\mathbf{F_6}$.

3. Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников: **V** + **F** – **E** = 2.

   Таким образом, $5/3\mathbf{F_5} + 2\mathbf{F_6} + \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6} - 2{,}5\mathbf{F_5} - 3\mathbf{F_6} = 2$ или $\mathbf{F_5} = 12$. То есть любой многогранник, составленный из пяти- и шестиугольников, сходящихся в вершинах по три, всегда содержит строго 12 пятиугольников.

4. Рассчитаем число шестиугольников: $F_6 = \dfrac{V - 5/3F_5}{2} = \dfrac{n - 5/3\cdot 12}{2} = 0{,}5n - 10$.

   а) 2017: $\mathbf{F_6} = 0{,}5\cdot 2017 - 10 = 998{,}5$ – ответ не имеет смысла, возможно, данный фуллерен не существует.

   б) 2018: $\mathbf{F_6} = 0{,}5\cdot 2018 - 10 = 999$.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 10. Изомерия икосаэдрических фуллеренов

Любой икосаэдрический фуллерен можно представить в виде «выкройки» на графеновой плоскости (рис. 1).

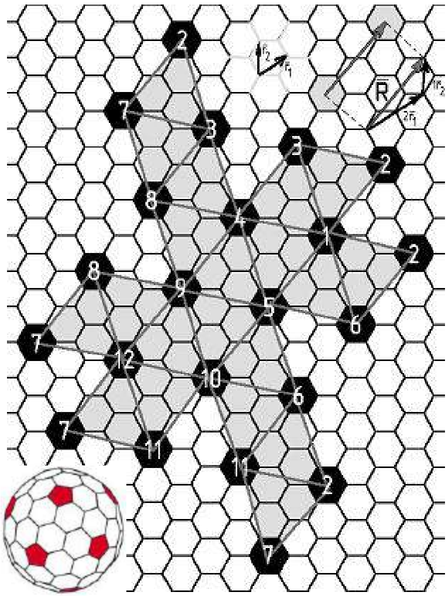


*Рис. 1. Пример развертки икосаэдрического фуллерена C_{140} на графеновой плоскости (**n** = 2, **m** = 1); если склеить вершины треугольников с одинаковыми номерами, получится фуллерен. На графеновой плоскости отмечены единичные векторы r_1 и r_2 и показан задающий развертку вектор* $\vec{R} = 2\vec{r}_1 + 1\vec{r}_2$.

Общее число атомов при этом определяется по формуле **N** = $20\left(n^2 + nm + m^2\right)$, где неотрицательные числа **n** и **m** – индексы хиральности – задают радиус-вектор $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$, длина которого равна стороне треугольника «выкройки». Изомерными называются молекулы икосаэдрических фуллеренов, имеющие одинаковое число атомов **N**, но разную сумму индексов хиральности **c** = **n** + **m**.

1. Рассматривая зависимость **c**(**n**) для изомеров произвольного икосаэдрического фуллерена C_N как <u>непрерывную</u> функцию, найдите значения $\mathbf{c_{min}}$ и $\mathbf{c_{max}}$. Запишите индексы хиральности (**n**, **m**) для этих изомеров через $X = N/20$. **(7 баллов)**

   Возможно ли для <u>реального</u> фуллерена C_N одновременное существование изомеров с суммами индексов хиральности $\mathbf{c_{min}}$ и $\mathbf{c_{max}}$? **(1 балл)**

2. Икосаэдрический фуллерен C_{242060} имеет шесть изомеров. Найдите (**n**,**m**) для изомеров C_{242060}, имеющих минимальное и максимальное значение **c**. Поясните логику поиска. **(8 баллов)**

В рамках задачи считайте фуллерены (**n**,**m**) и (**m**,**n**) одним и тем же изомером.

Всего – 16 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 10. Изомерия икосаэдрических фуллеренов

1.

1) Запишем величину **X** как функцию от суммы индексов хиральности:

$$X = \frac{N}{20} = n^2 + nm + m^2 = n^2 + 2nm + m^2 - nm = (n+m)^2 - nm = c^2 - n(c-n)$$

$$c^2 - cn + n^2 - X = 0$$

Запишем **c**(**n**) как корень квадратного уравнения:

$$c(n) = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4(n^2 - X)}}{2} = 0{,}5\left(n + \sqrt{4X - 3n^2}\right)$$

(корень с вычитанием дискриминанта нам не подходит, так как $\mathrm{c, n, m} \in \mathrm{N}_0$).

Для нахождения точки экстремума приравняем производную нулю:

$$c'(n) = 0{,}5\left(1 + 0{,}5\frac{-6n}{\sqrt{4X - 3n^2}}\right) = 0{,}5\left(1 - \frac{3n}{\sqrt{4X - 3n^2}}\right)$$

$$0{,}5\left(1 - \frac{3n}{\sqrt{4X - 3n^2}}\right) = 0$$

$$\frac{3n}{\sqrt{4X - 3n^2}} = 1$$

$$3n = \sqrt{4X - 3n^2}$$

$$9n^2 = 4X - 3n^2$$

$$3n^2 = X$$

$$n = \sqrt{X/3}$$

$$c\left(\sqrt{X/3}\right) = 0{,}5\left(\sqrt{X/3} + \sqrt{4X - 3\left(\sqrt{X/3}\right)^2}\right) = 0{,}5\sqrt{X}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{X/3}$$

$$m = c - n = 2\sqrt{X/3} - \sqrt{X/3} = \sqrt{X/3} = n$$

Рассчитаем значение второй производной в данной точке, чтобы установить характер экстремума:

$$c''(n) = -0{,}5\frac{3\sqrt{4X - 3n^2} - 3n \cdot 0{,}5\frac{-6n}{\sqrt{4X - 3n^2}}}{4X - 3n^2} = -1{,}5\frac{4X - 3n^2 + 3n^2}{\left(4X - 3n^2\right)^{3/2}} = -\frac{6X}{\left(4X - 3n^2\right)^{3/2}}$$

$$c''\left(\sqrt{X/3}\right) = -\frac{6X}{\left(4X - 3\left(\sqrt{X/3}\right)^2\right)^{3/2}} = -\frac{6X}{(3X)^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{3X}} < 0$$ – найденное значение **n** отвечает максимуму.

Следовательно, минимальному значению функции $c(n) = 0{,}5\left(n + \sqrt{4X - 3n^2}\right)$ будут отвечать граничные условия: **n** = 0, **c** = **m** или **n** = **c**, **m** = 0.

$$c(0) = 0{,}5\left(0 + \sqrt{4X - 3\cdot 0^2}\right) = \sqrt{X}\text{ , } \mathbf{m} = \sqrt{X}\text{ .}$$

Таким образом, минимальную величину $c_{\min} = \sqrt{X}$ имеет изомер с индексами (0, $\sqrt{X}$) или ($\sqrt{X}$,0), а максимальную $c_{\max} = 2\sqrt{X/3}$ – с индексами ($\sqrt{X/3}$, $\sqrt{X/3}$).

2) Допустим, для некоторого **N** и, соответственно, **X**, существуют одновременно оба изомера. Тогда одновременно должны выполнятся два условия: $\sqrt{X} \in \mathrm{N}_0$ и $\sqrt{X/3} \in \mathrm{N}_0$, что невозможно, так как эти две величины отличаются на множитель $\sqrt{1/3}$.

2. Рассчитаем величину **X** для икосаэдрического фуллерена C_{242060}:

$$X = \frac{N}{20} = \frac{242060}{20} = 12103.$$

Как мы увидели выше, при существовании для заданного **c** изомера фуллерена (0,**m**) он будет отвечать $\mathbf{c_{min}}$ = $\sqrt{N/20} = \sqrt{X}$. Ближайший к 12103 квадрат целого числа равен 12100 (110: 11^2 = 121), что чуть меньше 12103, а значит $\sqrt{12103}$ > 110.

Поскольку между $\mathbf{c_{min}}$ и $\mathbf{c_{max}}$ функция **c** больше не имеет экстремумов и монотонно возрастает, то поиск $c_{\min} \in \mathrm{N}_0$, соответствующих изомеру фуллерена, нужно начинать со 111.

Перебираем разные пары (**n**,**m**) для **c** = 111:

$X(0{,}111) = 111^2 + 111\cdot 0 + 0^2 = 12321$ – нет, > 12103
$X(1{,}110) = 110^2 + 110\cdot 1 + 1^2 = 12211$ – нет, > 12103
$X(2{,}109) = 109^2 + 109\cdot 2 + 2^2 = 12103$ – находим искомый изомер.

(Стоит отметить, что если бы мы не нашли на этом шаге изомер, т.е. полученное значение **X** оказалось бы меньше искомого, то нужно было бы взять следующее значение $\mathbf{c_{min}}$ = 111+1 = 112 и аналогично повторить поиск, перебирая пары индексов хиральности (112,0), (111,1) (эти 2 пары можно отбросить без рассмотрения, так как, очевидно, что отвечающие им значения **X** будут больше искомого), (110,2), (109,3), …, и повторять далее с разными **c** по возрастанию до тех пор, пока не найдется изомер.)

$$c_{\max} = 2\sqrt{\frac{12103}{3}} = 2\frac{\sqrt{12100+3}}{\sqrt{3}} > 2\frac{\sqrt{12100}}{\sqrt{3}}\text{ ; } 2\frac{\sqrt{12100}}{\sqrt{3}} \approx 127{,}17$$

т.к. **c** монотонно возрастает и $c \in \mathrm{N}_0$, то необходимо искать c_{max} начиная с 127.
перебираем разные пары (**n**,**m**) для c = 127:

$X(63,64) = 63^2 + 63 \cdot 64 + 64^2 = 12097$ – нет, < 12103

$X(62,65) = 62^2 + 62 \cdot 65 + 65^2 = 12099$ – нет, < 12103

$X(61,66) = 61^2 + 61 \cdot 66 + 66^2 = 12103$ – искомый изомер

(если бы искомый изомер не нашелся, то было бы необходимо повторять поиск, уменьшая **c** на единицу).

Полный список изомеров икосаэдрического фуллерена C_{242060}

(**n**,**m**)	**(66,61)**	(77,49)	(89,34)	(94,27)	(98,21)	**(109,2)**
c	**127**	126	123	121	119	**111**