МАТЕМАТИКА

Математика для школьников

Математика

Категория участников: школьники 7-11 классов

Блок теоретических заданий по **математике для школьников 7-11 классов** включает задачи разной сложности. Для повышения вероятности прохождения на очный тур Вам желательно решить задачи не только по математике, но и по физике, биологии, химии, чтобы набрать больше баллов. Все прошедшие на очный тур обязательно решают задачи по всем четырем предметам.

Задания

1. Гидрирование С20

Найдите формулы $C_{20}H_x$ всех продуктов присоединения водорода к фуллерену C_{20}, у которых все атомы водорода лежат в вершинах какого-нибудь правильного многогранника...

2. Статистические сополимеры

В пробирке находятся наночастицы (NP) с прикрепленными к ним молекулами сополимера, формула которых может быть записана как $NP–A_{12}B_{12}$...

3. Перекладывание атомов в кубиках

Допустим, нанокластер С можно разобрать на отдельные атомы, а затем собрать из них без остатка 3 других кубических нанокластера, причем n_1, n_2, n_3, n составляют арифметическую прогрессию...

4. Углеродный нанобублик

Всем хорошо известны углеродные наношарики (фуллерены). Более сложную структуру – нанотор – можно рассматривать как некий «гибрид» внешней углеродной нанотрубки и нано-переходника...

5. Гомологический ряд борофенов

Бор, как и углерод, может образовывать каркасные молекулы, подобные фуллеренам – борсферены (обнаружены в 2014 году), а также подобные графену квази-двумерные структуры – борофены...

6. Икосаэдрические фуллерены и индексы хиральности

Любой икосаэдрический фуллерен можно представить в виде «выкройки» на графеновой плоскости. Общее число атомов при этом определяется по формуле $N = 20(n^2+nm+m^2)$...

7. Митохондриальная Ева и ближайший общий предок

У всех людей есть предки. Чем дальше уходим вглубь веков, тем больше предков у каждого из нас, и тем больше людей имеют общих предков...

8. Контактное число

При построении нанокластера или кристалла вещества, Природа часто решает математическую задачу о Контактном Числе (КЧ): какое максимальное число одинаковых шаров можно разместить...

9. Чертова дюжина

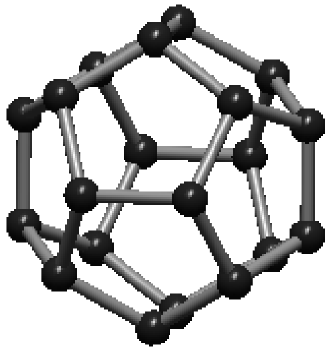
Рост нанокластера можно рассматривать как последовательное увеличение числа слоев, тогда первым шагом можно назвать размещение атомов первого слоя вкруг центрального атома...

10. Триплетный Код Полуэкта

Юный нанотехнолог Полуэкт, насмотревшись фильмов про расшифровку британскими математиками кодов немецких секретных сообщений во время Второй мировой войны, захотел создать штамм...

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 1. Гидрирование C_{20}



Найдите формулы $C_{20}H_x$ ***всех*** продуктов присоединения* водорода к фуллерену C_{20}, у которых все атомы водорода лежат в вершинах какого-нибудь правильного многогранника. (К каждому атому углерода может присоединиться только один атом водорода). Для каждой формулы, удовлетворяющей условию, схематично нарисуйте, к каким вершинам присоединены атомы водорода. Поясните, будут ли среди них пары зеркальных изомеров**?

* каркас фуллерена не разрушается.
** зеркальные изомеры – молекулы, не переходящие друг в друга ни при каких поворотах в пространстве, но переходящие друг в друга при отражении в зеркале.

Всего – 5 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 2. Статистические сополимеры

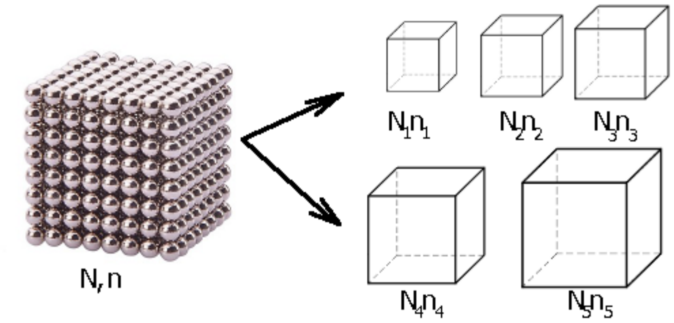
В пробирке находятся наночастицы (NP) с прикрепленными к ним молекулами сополимера, формула которых может быть записана как **NP**–$\mathbf{A_{12}B_{12}}$. При этом мономерные звенья **A** и **B** в цепи сополимера расположены статистически. Если для каких-то молекул сополимера структурную формулу удается записать в виде **NP**–$\mathbf{(A_xB_x)_n}$ при **n** > 1 (см. пример на рисунке), такие сополимеры называют регулярными.

1. Сколько различных вариантов регулярного расположения звеньев **A** и **B** возможно для **NP**-$\mathbf{A_{12}B_{12}}$? **(4 балла)**
2. Какова вероятность того, что случайно выбранная **NP**–$\mathbf{A_{12}B_{12}}$ будет иметь регулярную структуру? **(2 балла)**

Всего – 6 баллов

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 3. Перекладывание атомов в кубиках



*Кубический нанокластер **C** из атомов железа. **N** – общее число атомов в кластере,*
***n** – число атомов, приходящееся на ребро. Слева показан пример нанокластера для **n** = 8.*

Допустим, нанокластер **C** можно разобрать на отдельные атомы, а затем собрать из них без остатка (см. рисунок):

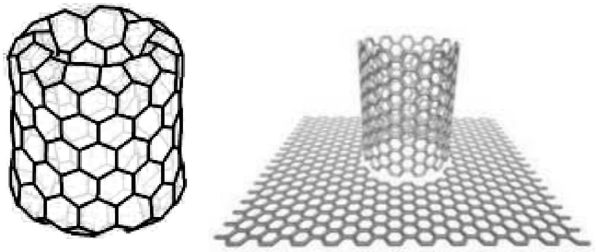
а. 3 других кубических нанокластера, причем $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, **n** составляют арифметическую прогрессию с шагом 1;
б. 2 одинаковых кубических нанокластера ($\mathbf{n_4} = \mathbf{n_5}$);
в. 2 разных по размеру кубических нанокластера ($\mathbf{n_4} \neq \mathbf{n_5}$).

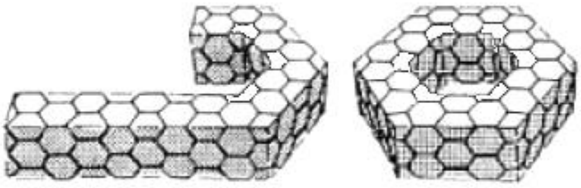
Для каждого пункта найдите соответствующие нанокластеру **C** минимальные **N** и **n**, а также все $\mathbf{N_i}$, $\mathbf{n_i}$.

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 4. Углеродный нанобублик

Всем хорошо известны углеродные наношарики (фуллерены). Более сложную структуру – нанотор – можно рассматривать как некий «гибрид» внешней углеродной нанотрубки и внутреннего нано-переходника трубка-графен.

а) 

б) 

1. Поясните, какое минимальное число дефектов (углеродных циклов, отличных от шестиугольников) может содержать нанотор и какие это дефекты? **(2 балла)**

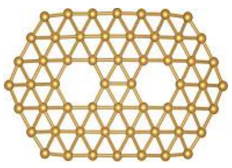
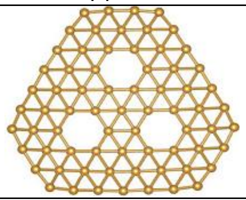
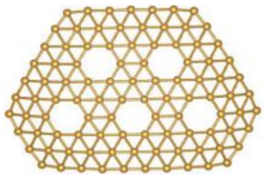
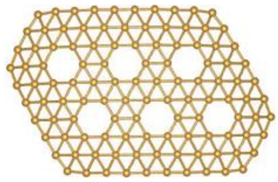
2. Другой способ построить нанотор из углеродной нанотрубки схематично приведен на рисунке *б*. Основываясь на симметричности полученной фигуры, найдите, сколько у нее вершин **V**? **(3 балла)** Оцените диаметр трубки, из которой был свернут нанотор. Длину С–С связи считать равной 0.14 нм. **(1 балл)**

Всего – 6 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 5. Гомологический ряд борофенов

Бор, как и углерод, может образовывать каркасные молекулы, подобные фуллеренам – борсферены (обнаружены в 2014 году), а также подобные графену квази-двумерные структуры – борофены (первую такую структуру получили в конце 2015-го года, *Science 350, 6267, 1513 (2015)*). Моделирование показало, что для того, чтобы форма борофенового листа была максимально приближена к плоской, в его структуре необходимо наличие систематических дефектов – шестиугольников, образующихся на месте отсутствующего атома.

В таблице представлен один из гомологических рядов двумерных кластеров бора B_n:

		**?**		
x = 1	**x** = 2	**x** = 3	**x** = 4	**x** = 5

x – порядковый номер молекулы в последовательности.

1. Выведите общий вид зависимости **n**(**x**) для произвольного кластера данного ряда. **(1.5 балла)**
2. Опишите общий алгоритм построения следующего члена ряда на основе предыдущего. **(1.5 балла)**
3. Сколько атомов бора в кластере с **x** = 3? Нарисуйте его структуру. **(1.5 балла)**
4. Рассчитайте радиус описанной окружности для кластера с **x** = 2, если расстояние между соседними атомами бора **a** = 0.16 нм, атомы считать точечными. **(2 балла)**
5. Выведите общую формулу для расчета длины кластера **L**(**x**) (как максимальной длины по горизонтали). **(1.5 балла)**
6. Какое соотношение атомов бора к дефектам в бесконечно длинном борофене? **(1 балл)**

Всего – 9 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 6. Икосаэдрические фуллерены и индексы хиральности

Любой икосаэдрический фуллерен можно представить в виде «выкройки» на графеновой плоскости (рис. 1). Общее число атомов при этом определяется по формуле **N** = $20(n^2+nm+m^2)$, где натуральные числа **n** и **m** – индексы хиральности – задают радиус-вектор $\vec{R}=n\vec{r}_1+m\vec{r}_2$, длина которого равна стороне треугольника «выкройки».

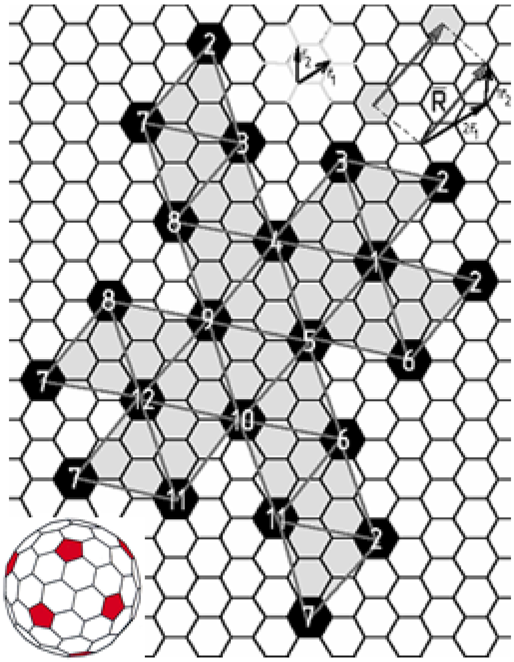


*Рис. 1. Пример развертки икосаэдрического фуллерена C_{140} на графеновой плоскости (**n** = 2, **m** = 1); если склеить вершины треугольников с одинаковыми номерами, получится фуллерен. На графеновой плоскости отмечены единичные векторы **r**$_1$ и **r**$_2$ и показан задающий развертку вектор $\vec{R}=2\vec{r}_1+1\vec{r}_2$.*

1. Рассмотрим множество икосаэдрических фуллеренов (ряд **F**$_c$), имеющих одинаковую сумму индексов хиральности **c** = **n** + **m**. Выразите число атомов и индексы хиральности через **c** для икосаэдрических фуллеренов этого ряда, имеющих минимальное **N**$_{min}$ и максимальное **N**$_{max}$ число атомов в молекуле. **(4 балла)**
2. Запишите все члены ряда **F**$_c$, включающего в себя самый маленький икосаэдрический фуллерен. **(1 балл)**
3. Для ряда **F**$_c$, включающего бакибол C_{60}, рассчитайте **N**$_{min}$ и **N**$_{max}$. Сколько еще и каких (**N**) икосаэдрических фуллеренов содержит этот ряд? **(2 балла)**
4. Каково число икосаэдрических фуллеренов в ряду **F**$_{2017}$? Найдите **N**$_{min}$ и **N**$_{max}$ для этого ряда. **(3 балла)**

Считать фуллерены (**n**,**m**) и (**m**,**n**) одним и тем же членом ряда.

Всего – 10 баллов

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 7. Митохондриальная Ева и ближайший общий предок

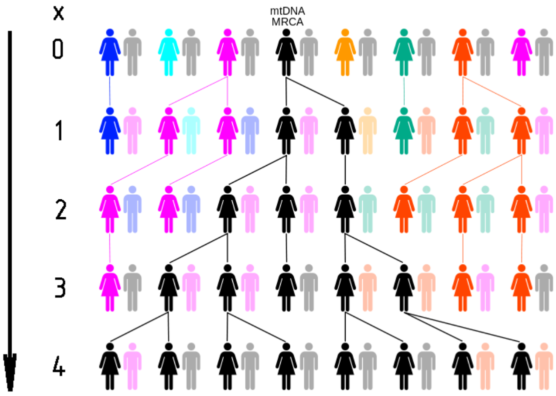


Рис. Пример эволюции популяции из ***n*** *= 16 человек со случайным возникновением митохондриальной Евы уже в четвертом поколении (**x** = 4).*

У всех людей есть предки. Чем дальше уходим вглубь веков, тем больше предков у каждого из нас, и тем больше людей имеют общих предков. Поэтому можно найти такое время (~5 000 лет назад), в котором жил ближайший общий предок (БОП) всех людей.

Однако, если считать родство по митохондриям (которые наследуются только по материнской линии), то ближайшим общим предком, от которого все современное человечество унаследовало митохондриальную ДНК, будет жившая в Африке около 200 000 лет назад женщина – «митохондриальная Ева».

Чтобы понять феномен возникновения Евы, а также, почему она намного старше БОП всех ныне живущих людей, рассмотрим простую математическую модель: популяцию, состоящую в нулевом поколении из **n** = 2048 неродственных людей, мужчин и женщин поровну. Браки в этой популяции случайны, в каждой семье всегда рождается по 2 ребенка, вероятность того, что ребенок будет мальчиком или девочкой равна 50%, а между сменой поколений проходит $\mathbf{t_0}$ = 20 лет.

1. Для первого поколения (**x** = 1) рассчитайте:
   а. в популяции – долю групп людей, имеющих одинаковых предков ($\boldsymbol{\omega_{n1}}$) **(1 балл)**
   б. среди женщин популяции – долю групп женщин, имеющих одинаковых матерей ($\boldsymbol{\omega_{ne1}}$) **(1 балл)**
2.
   а. Найдите, чему равно минимальное время $\mathbf{t_{min}}$, за которое у всех членов рассматриваемой популяции может возникнуть общий предок в нулевом поколении. **(2.5 балла)**
   б. Каково при этом суммарное число всех предков у произвольного человека из поколения, отвечающего времени $\mathbf{t_{min}}$? **(1 балл)**
3. Путем <u>*компьютерного моделирования*</u>* найдите среднее время $\mathbf{t_e}$, за которое в рассмотренной популяции возникает митохондриальная Ева. **(7 баллов)** Во сколько раз $\mathbf{t_e}$ больше $\mathbf{t_{min}}$? **(1 балл)**
4. Считая, что $\mathbf{t_e}$ пропорционально **n**, оцените размер популяции, в которой по прошествии 200 000 лет возникла митохондриальная Ева. **(1.5 балла)**

*Напишите программу (на любом языке программирования), которая будет осуществлять смену поколений соответственно модели, для каждого поколения находить остающееся в популяции число общих матерей из поколения **x** = 0, до тех пор, пока не останется лишь одна. Приведите в ответе исходный код и коротко опишите алгоритм программы.

Подсказка для компьютерного моделирования:
- можно рассматривать только женскую часть популяции;
- величиной $\mathbf{t_e}$ считать время, через которое все женщины популяции будут иметь одну общую мать из нулевого поколения;
- поскольку получаемая величина $\mathbf{t_e}$ подвержена случайным изменениям, то моделирование необходимо повторить 10–20 раз и полученные значения усреднить;
- перед каждой сменой поколений всю популяцию можно разбивать случайным образом на группы некоторого минимального размера, в каждой из которых выполнить смену поколений по единому для всех этих групп алгоритму.

Всего – 15 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 8. Контактное число

При построении нанокластера или кристалла вещества, Природа часто решает математическую задачу о Контактном Числе (КЧ): *какое максимальное число одинаковых шаров можно разместить вокруг центрального, так, чтобы все шары оболочки его касались*? Поиск КЧ привел к диспуту в 1694-м году между Ньютоном и математиком-астрономом Грегори. Ньютон полагал, что контактное число равно 12 (несложно заметить, что в упаковках одинаковых апельсинов, шариков, атомов, число соседей не бывает больше 12-ти), в то же время Грегори считал, что контактное число может быть и больше. Попробуем на основе несложных расчетов получить оценки КЧ сверху.

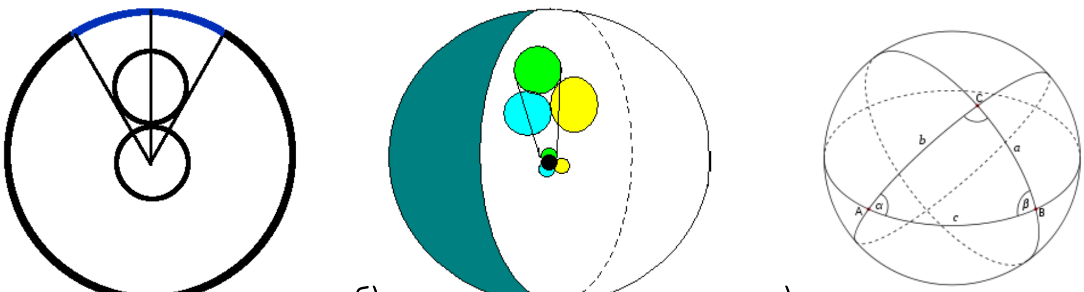
Контактное число на плоскости

Рассмотрим максимально плотную упаковку из одного слоя одинаковых атомов-шаров на плоскости («монослой»).

1. Найдите КЧ при заполнении атомами плоскости. Дайте краткое обоснование. **(1 балл)**
2. Оцените, сколько атомов радиусом 0.1 нм можно разместить на поверхности сферической наночастицы радиусом 10 нм. **(2 балла)**

Вслед за Грегори

Рассмотрим кластер, в котором вокруг центрального атома расположена оболочка из N атомов и каждый касается центрального. Спроецируем все атомы оболочки на некоторую далекую сферу радиуса R’ (см. рисунок).



а) б) в)

Рис. а) Проекция одного атома на далекую сферу. б) Проекция трех атомов, касающихся центрального, на далекую сферу. в) Сферический треугольник ***ABC****.*
Его площадь равна $S_{\Delta ABC} = R'^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$*, где α, β и γ –углы между плоскостями, формирующими стороны сферического треугольника.*

Самую грубую оценку сверху КЧ можно получить, ответив на вопрос:

3. Во сколько раз площадь сферы радиуса **R’** больше площади проекции на нее одного атома, касающегося центрального? **(2 балла)**
4. Допустим, все атомы оболочки касаются друг друга и их центры образуют правильные треугольники. Рассчитайте, во сколько раз площадь сферы радиуса **R’** больше площади сферического треугольника, являющегося проекцией центров трех касающихся атомов. Воспользовавшись теоремой Эйлера, оцените, какому числу атомов теоретически отвечает полученное число «треугольных граней». **(5 баллов)**

Сейчас уже точно известно, что, несмотря на кажущееся наличие в оболочке места под 13-й шар, невозможно «сгруппировать» 12 шаров так, чтобы 13-й тоже касался центрального. Потребовалось несколько столетий со времени спора Ньютона и Грегори для строгого решения этой задачи. Теорема Эйлера: **V – E + F = 2**, где **V**, **E**, **F** – число вершин, рёбер и граней многогранника.

Всего – 10 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 9. Чертова дюжина

Рост нанокластера можно рассматривать как последовательное увеличение числа слоев, тогда первым шагом можно назвать размещение атомов первого слоя вкруг центрального атома. Известно, что максимальное число атомов, которое можно разместить вокруг другого такого же атома, составляет 12, причем расположить их можно не только одним способом.

1. Используя теорему Эйлера*, найдите все возможные многогранники, состоящие из 12 вершин, если все их грани представляют собой правильные многоугольники, а каждая вершина имеет одинаковое число соседей. Считать, что такие многогранники содержат не более двух типов граней, пятиугольные грани отсутствуют. **(4 балла)**

2. Некоторые многогранники, состоящие из 12 вершин, гораздо проще найти, исходя из соображений симметрии, зная, что они состоят из правильных многоугольников и имеют поворотную ось пятого порядка. Найдите все такие многогранники. **(1.5 балла)**

3. Определите, сколько и каких граней и ребер содержит каждый из найденных вами многогранников, а также изобразите их либо схематично, либо в виде плоской проекции на одну из граней. **(3 балла)**

Теперь посмотрим, что получится, если пытаться построить на основе найденных многогранников нанокластеры из 13 атомов. Поместим атомы в центры и в каждую вершину всех найденных многогранников.

4. Есть ли среди получившихся кластеров такие, что:
   а. все атомы оболочки касаются друг друга, но центральный атом не может одновременно касаться всех атомов оболочки?
   б. все атомы оболочки касаются друг друга, и центральный атом касается всех атомов оболочки?
   в. центральный атом касается всех атомов оболочки, но атомы оболочки не касаются друг друга?

   Ответы подтвердите расчетами (при необходимости можно использовать справочные формулы, атомы считать жесткими сферами одинакового радиуса). **(6 баллов)**

5. Рассчитайте радиусы сфер, описанных вокруг кластеров Au_{13} для каждой формы кластера из п.4 (радиус атома золота **r** = 0.14 нм). **(1.5 балла)**

* Теорема Эйлера: **V – E + F = 2**, где **V**, **E**, **F** – число вершин, рёбер и граней многогранника.

Всего – 16 баллов

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Задача 10. Триплетный Код Полуэкта

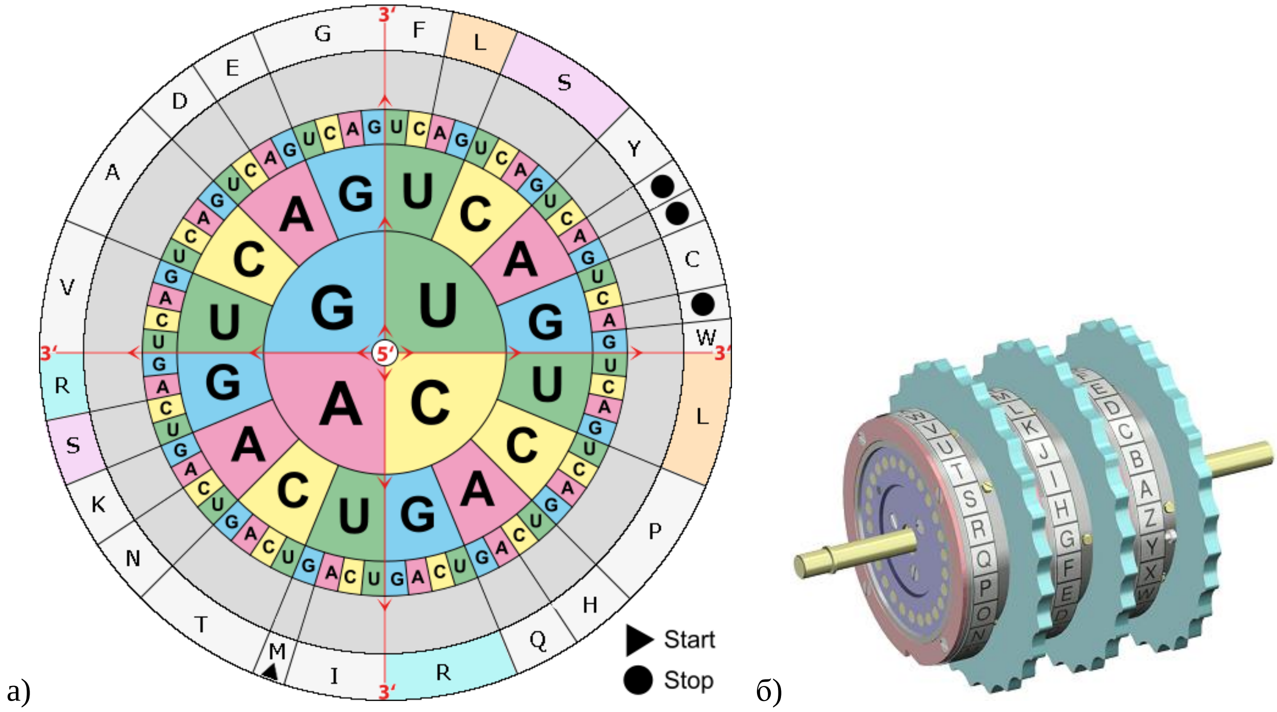


Рис. а) Бионаномашина – рибосома – действует по простому алгоритму: последовательно считывает триплеты нуклеотидов мРНК, начиная с заданного условной последовательностью места, сопоставляет им аминокислоты полипептида и по команде прерывает синтез. На рисунке представлен секторный вариант таблицы соответствия кодонов мРНК и 20 аминокислот. б) Три последовательно соединенных ротора немецкой шифровальной машины «Энигма», сопоставлявшей конечные буквы исходным согласно взаиморасположению дисков.

Юный нанотехнолог Полуэкт, насмотревшись фильмов про расшифровку британскими математиками кодов немецких секретных сообщений во время Второй мировой войны, захотел создать штамм кишечной палочки *E. coli* Poluectus с закодированным в геноме посланием, которое смогли бы расшифровать потомки. Полуэкт решил, что будет кодировать триплетами нуклеотидов текст на английском языке (алфавит содержит 26 букв). При этом будут закодированы: заглавные и строчные буквы, пробел и 7 дополнительных знаков пунктуации.

1. Хватит ли Полуэкту различных вариантов триплетов, чтобы закодировать выбранные символы? Останутся ли незакодированные символы или неиспользованные варианты триплетов? Сколько возможно разных вариантов таких триплетных кодировок? **(3 балла)**

Прежде чем кодировать большой текст, Полуэкт решил потренироваться, отправив в штамме бактерий короткую записку студентам. Студенты выделили из него следующий пептид:

CNCWFVSANCDSNGMRVRDSVPMSPVNHDWCMDPMWCVMWVMHAVMFWPHMLPWFDPDCAMRDPV

SHDWCPMWVMHAVMCNCWHVSACWGWADVPYMCWMRWCRVPMHANHMHAVMPVSVCHMCWKVGML

PDSVMRNPMNRNPRVRMVWPMRVRVGWLFVCHMWVMHAVMCNCWFNSADCVPMSPVNHVRMKTMH

AVMKWHHWFIQLMNLLPWNSAYMDHMRDGGMNGGWRMSPVNHDCAMCNCWRVRDPVPMRDHAMSW

CHPWGGNKGVMFWRVFVCHPMNHMHAVMCNCWPSNGVYMRADSAMSWQGRMGVNRMHWMVQHQPV

MPVRWGQHDWCMDCMCVRMFNHVPDNGPMSPVNHDWCMNCRMRDPVNPVMHPVNHFVCHYMNCRM

FNTMGVNRMHWMHAVMAWGTMAPNDGMWVMCNCWHVSACWGWADVPMIMCNCWPWKWHPY

Однако затем они решили, что перебрать все варианты кодировок из п. 1 нереально даже при помощи компьютера. Но присутствовавший при этом школьник Петя, зная, что Полуэкт подбирал свой код так, чтобы студенты смогли его расшифровать, а также предположив, что текст – о нанотехнологиях, что-то записывая и стирая карандашом на распечатке пептида, восстановил все послание за 6 минут.

2. Попробуйте восстановить текст и вы. Поясните ход решения, а также вкратце опишите, как устроен триплетный код Полуэкта. Считать, что каждому символу текста соответствует аминокислота и наоборот. **(9 баллов)**
3. Можно ли установить, как в коде Полуэкта закодированы заглавные и строчные буквы? **(1 балл)**
4. Запишите триплетным кодом Полуэкта (для удобства разделяя пробелами триплеты при записи) часть молекулы мРНК, несущую закодированные символы, для фразы: XI Int. Olymp. on Nanotechnologies. **(3 балла)**
5. Запишите последовательность аминокислот в соответствующем пептиде. **(1 балл)**

Всего – 17 баллов