Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Решения. Простые задачи (варианты 3 и 4)

Решение задачи 1. Растворы белка

1. На один куб со стороной L объемом $V_{1s} = L^3$ приходится одна молекула белка (поскольку у куба 8 вершин, а каждая вершина принадлежит одновременно 8 кубам, или же можно представить себе одну молекулу в центре кубической ячейки у которой вершины находятся в центрах образованных молекулами кубов). По определению,

$$\omega = \frac{m_p}{m_s}\cdot 100\% = \frac{V_p\rho_p}{V_s\rho_s}\cdot 100\% = \frac{V_{1p}N_a\rho_p}{V_{1s}N_a\rho_s}\cdot 100\% = \frac{V_{1p}\rho_p}{V_1\rho_s}\cdot 100\% = \frac{M_p/N_a\rho_p}{\rho_p V_{1s}\rho_s}\cdot 100\% = \frac{M_p/N_a}{V_{1s}\rho_s}\cdot 100\%$$

где индекс **p** относится к белку, а индекс **s** – к раствору, а $\mathbf{N_a}$ количество молекул ($6\cdot 10^{23}$) масса которых равна $\mathbf{M_p}$. Тогда

$$V_1 = \frac{M_p 100\%}{\omega\rho N_a}$$

$$L = \sqrt[3]{\frac{M_p 100\%}{\omega\rho N_a}}$$

Для расчета переведем плотность в удобные единицы: **ρ** = 1 г/см^3 = 10^{-21} г/нм^3

2. Обозначим искомую величину как $y = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{V_{1s}'}{V_{1s}}$. То есть, $\mathbf{V_{1s}' = yV_{1s}}$.

По условию, **L’** = **xL**

$$\sqrt[3]{V_{1s}'} = x\sqrt[3]{V_{1s}}$$
$$\sqrt[3]{yV_{1s}} = x\sqrt[3]{V_{1s}}$$
$$\mathbf{y = x^3}$$

Вариант	**ω** %	**M**, г	**x**	**L**, нм	**y**
3	18	78732	4	9	64
4	17	52224	5	8	125

Решение задачи 2. Дополнительная пара

1. Произвольная последовательность длиной **n** из *четырех* «стандартных» нуклеотидов – имеет $4^{\mathbf{n}} = 2^{\mathbf{2n}}$ возможных вариантов. Чтобы закодировать ее последовательностью из **x** однобитных ячеек (каждая из которых имеет два возможных значения), необходимо, чтобы число возможных вариантов такой последовательности $2^{\mathbf{x}}$ было не меньше числа вариантов последовательности нуклеотидов. Т.е. $2^{\mathbf{x}} \geq 2^{\mathbf{2n}}$.

Следовательно, $x \geq 2n$, и для кодирования потребуется минимум **2n** однобитных ячеек.

При записи последовательности такой же длины с использованием расширенного «алфавита» из *шести* нуклеотидов мы получаем один из $6^n = 2^n3^n$ вариантов, аналогично,

$$2^y \geq 2^n3^n$$

Найдем минимальное значение **y** без вычисления логарифмов:

Вариант	n	x		y
3	6	12	$6^6 = 2^63^6 = 2^6 \cdot 729 < 2^6 \cdot 1024 = 2^{16}$	16
4	7	14	$6^7 = 2^73^7 = 2^7 \cdot 2187 < 2^4 \cdot 4096 = 2^{19}$	19

2. Две заменяемые позиции могут заполнить дополнительные «буквы» **X** и **Y** в произвольном сочетании, всего $2^2 = 4$ варианта (XX, XY, YX, YY).
   Две произвольные позиции в цепочке из **m** позиций можно выбрать C_m^2 способами.
   Тогда всего вариантов полусинтетических последовательностей:

$$N = 4C_m^2 = 4\frac{m!}{2!(m-2)!} = 2m(m-1)$$

Вариант	M	N
3	26	2·26·25 = 1300
4	24	2·24·23 = 1104

Решение задачи 3. Нанокластеры из пленки

1. Площадь подложки **S** = $100^2 = 10^4$ мкм^2 или 10^{10} нм^2. N = S·c

2. На правильный треугольник со стороной L и площадью $S_\Delta = 0{,}5L^2 \sin 60^\circ = L^2\sqrt{3}/4$ приходится 3·(1/6) = 0,5 нанокластера золота (у каждого треугольника 3 вершины, каждая из которых общая для 6 треугольников). Тогда на один кластер приходится площадь $S_0 = L^2\sqrt{3}/2$. В тоже время, на один кластер приходится площадь $S_0 = 1/c$.

   Тогда $L = \sqrt{2/c\sqrt{3}}$.

3. Объем кластера составляет $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, он получается из фрагмента нанопленки золота площадью S_0 и толщиной h объемом $V = S_0h$. Находим $r = \sqrt[3]{\frac{3h}{4\pi c}}$

Вариант	**h**, нм	**c**, шт/нм^2	N	**L**, нм	**r**, нм
3	27	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}5 \cdot 10^6$	68	30
4	32	$1{,}25 \cdot 10^{-4}$	$1{,}25 \cdot 10^6$	96	40

Решение задачи 4. Нанопереходник

1. Рассмотрим закрытый с двух сторон шапочками нанопереходник. Несмотря на то, что он может не являться выпуклым многогранником, мы можем его непрерывно деформировать (например, «надуть» или спроецировать вторую трубку на входящий в нанопереходник торец первой) чтобы получился выпуклый многогранник и мы могли применить теорему Эйлера.

$$V - E + F = 2$$
$$1/3(5F_5 + 6F_6 + 7F_7) - 1/2(5F_5 + 6F_6 + 7F_7) + F_5 + F_6 + F_7 = 2$$

(поскольку каждая вершина принадлежит одновременно трем многоугольникам, а каждый n-угольник имеет n вершин; каждое ребро принадлежит двум многоугольникам, а каждый n-угольник содержит n ребер).

Решая уравнение, получаем $F_5 - 12 = F_7$.
При отсутствии семиугольников $F_5 = 12$ (фуллерен).
Пятиугольники могут содержаться как в шапочках, так и в нанопереходнике:

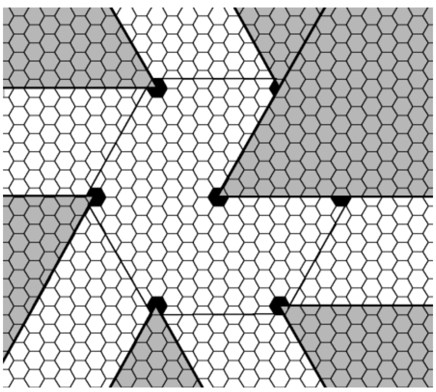
$$F_5 = F_5(\text{шап}) + F_5(\text{пер})$$

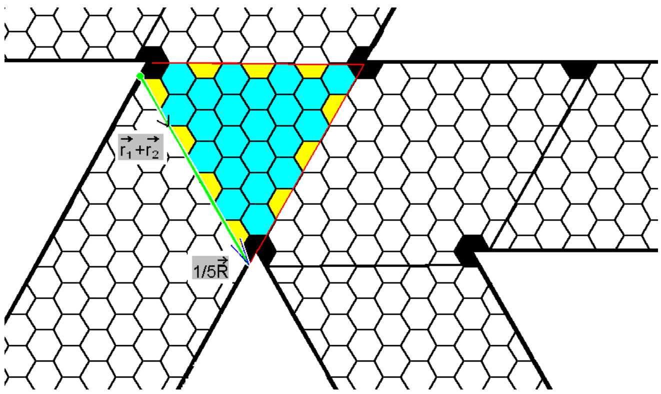
Следовательно, поскольку шапочки исходных нанотрубок, по условию, не содержат семиугольников, то $F_5(\text{шап}) = 12 \Rightarrow F_5(\text{пер}) = F_7$

2. Из предыдущего пункта следует, что наш нанопереходник должен содержать **<u>равное</u>** число пятиугольников и семиугольников, значит минимальное число как пятиугольников, так и семиугольников составляет max (F_5(усл), F_7(усл))

Вариант	**F_5(усл)**	**F_7(усл)**	**F_5**	**F_7**
3	5	8	8	8
4	6	9	9	9

Решение задачи 5. Половинки от фуллерена





1. Важно увидеть, что линия, очерчивающая шапочку после вырезания секторов – это и есть радиус вектор R (минимальный путь по поверхности трубки, получающейся при склеивании образующихся 5 графеновых лент, которые скручиваются в спирали и склеиваются).

Радиус вектор при этом проходит по большим диагоналям и ребрам шестиугольников, что возможно только при равенстве индексов хиральности n = m (**зубчатая трубка**) (см. пример для варианта 3 на рисунке). Чтобы определить индексы хиральности нанотрубки, необходимо найти, сколько отрезков «большая диагональ + сторона» (равных по длине сумме единичных векторов) содержит радиус вектор R в каждой «полоске» нанотрубки и умножить на 5 (общее число таких полосок).

2. Сосчитаем число шестиугольников $\mathbf{n}'_6$ по рисунку (в одном из 5-ти секторов шапочки. Фуллерен $C_\mathbf{x}$ состоит из двух половинок, поэтому $\mathbf{x} = 20 + 2F_6 = 20 + 2\cdot 2\cdot 5\cdot n'_6$

Вариант	(**n**, **m**)	$\mathbf{n}'_6$	$C_\mathbf{x}$
3	(20,20)	27	C_{560}
4	(15,15)	15,5	C_{330}

МАТЕМАТИКА

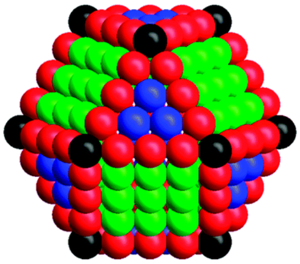
Математика для школьников 7 – 11 класса (очный тур)
Решения. Более сложные задачи

Решение задачи 6. Кубооктаэдр

1. **V** = 12, **E** = 24, **F_3** = 8, **F_4** = 6
   12 – 24 + 8 + 6 = 2 – верно

2.

1) **n** = 1 **M** = 12 (вершины)



n = 2
M = 12 (вершины) + 24·1 (ребра без вершин) + 6·1 (квадраты без ребер) + 8·0 (треуголь ники без ребер) = 42
n = 3 **M** = 12 + 24·2 + $6 \cdot 2^2$ + 8 = 92
n = 4 **M** = 12 + 24·3 + $6 \cdot 3^2$ + 8·3 = 162
n = 5 **M** = 12 + 24·4 + $6 \cdot 4^2$ + 8·6 = 252

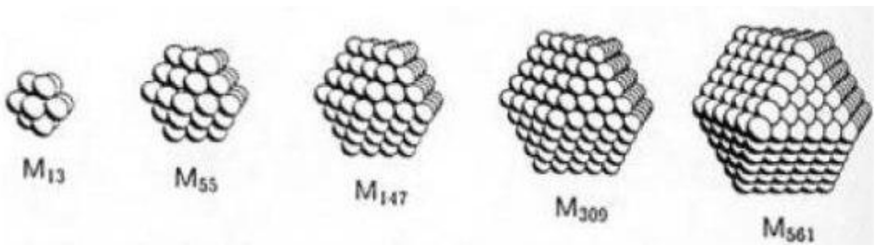
2)

- 12 атомов в вершинах;
- на ребрах (с вычетом двух атомов, ранее посчитанных в вершинах) 24·(**n** + 1 – 2) = 24·(**n** – 1) атома (исходное число атомов на ребре на 1 больше, чем номер оболочки);
- на треугольных гранях (с вычетом атомов, ранее посчитанных на ребрах) 8·0,5·(**n** + 1 – 3)·(**n** +1 – 3 + 1) = 4·(n^2 – 3**n** + 2) = 4n^2 – 12**n** + 8 атомов;
- на квадратных гранях (с вычетом атомов, ранее посчитанных на ребрах) 6·(**n** + 1 – 2)^2 = 6(**n** – 1)^2 = 6n^2 – 12**n** + 6 атомов.

Тогда в **n**-й оболочке всего
M(**n**) = 12 + 24(**n** – 1) + 4n^2 – 12**n** + 8 + 6n^2 – 12**n** + 6 = 10n^2 + 2 атома

3. $$N(n)=1+\sum_{m=1}^{n}\left(10m^2+2\right)=1+10\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}2=1+10\sum_{m=1}^{n}m^2+2n$$

$$N(n)=1+10\sum_{m=1}^{n}m^2+2n=1+2n+10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1+2n+5\frac{2n^3+3n^2+n}{3}=\frac{1}{3}\left(10n^3+15n^2+11n+3\right)$$



4. а) **N**(4) = 309

   Рассмотрим кубооктаэдр, вершины которого лежат в центрах атомов вершин кластера. Описанная вокруг такого многогранника сфера будет касаться всех его вершин, причем его 24 ребра образуют 4 правильных шестиугольника, каждый из которых вписан в экваториальную плоскость сферы. Таким образом, радиус данной сферы равен длине стороны шестиугольника, то есть, длине его ребра – 2nr. В свою очередь, радиус сферы, описанной вокруг кластера, будет больше на радиус атома. Следовательно:

   $$\mathbf{D} = 2(2\mathbf{nr} + \mathbf{r}) = 2\cdot 9\cdot 0,14 = 2,52 \text{ нм}$$

   б) $\omega = \frac{M(4)}{N(4)} = \frac{162}{309} = 0,52$

5.
   - атомы внутренних оболочек (КЧ = 12, как и у центрального атома);
   - атомы на треугольных гранях вне ребер (касаются 6 атомов слоя + 3 атомов предыдущего слоя = 9);
   - атомы на квадратных гранях вне ребер (4 атома слоя + 4 атома предыдущего слоя = 8);
   - атомы на ребрах (2 атома на ребре + 2 атома треугольной грани + 1 атом квадратной грани + 2 атома ребра предыдущего слоя = 7);
   - атомы в вершинах (4 атома ребер + 1 атом-вершина предыдущего слоя = 5).

Решение задачи 7. Нанотехнологии и математика: характеристики жесткого диска

1. Площадь двухсторонней пластины, занятая информацией, может быть записана как удвоенная площадь кольца:

   $$S = 2*(S_{max} – S_{min}) = 0,5\pi(D^2_{max} – D^2_{min}) = 0,5\cdot 3(9,1^2 – 3,7^2) = 103,68 \text{ см}^2.$$

   С другой стороны, если один бит имеет форму квадрата со стороной **a** нм (и занимает площадь $10^{-14}\cdot\mathbf{a}^2$ см^2), то S равна произведению количества информации на площадь, занимаемую одним битом (одним магнитным доменом):

   $$S = 8\cdot 10^{12}\cdot a^2\cdot 10^{-14} = 0,08a^2 \text{ см}^2$$

   Найдем **a**:

   $$a = \sqrt{S/0,08} = \sqrt{103,68/0,08} = \sqrt{1296} = \underline{\mathbf{36\ нм}}$$

2. Площадь сектора при уменьшении его размера от 36 до 10 нм уменьшится в $(36/10)^2$ = 12,96 раз, во столько же раз увеличится объем информации, который составит **12,96 терабайт**.

3. Информацию на диске можно разбить на последовательные витки, каждый из которых считывается за один оборот (пренебрегаем временем позиционирования на витке по сравнению со временем его чтения). Общее число витков составит

$$n = (R_{\max} - R_{\min})/a = \frac{(D_{\max} - D_{\min})}{2}/a = (9{,}1 - 3{,}7)/2/(36\cdot10^{-7}) = 7{,}5\cdot10^{5}$$

При частоте вращения 7200 оборотов за минуту они будут прочитаны за

$$t = 7{,}5\cdot10^{5}/7200 \approx \underline{\textbf{104 минуты}}$$

4. Найдем скорость чтения по витку с диаметром D. Он считывается за время 60/7200 = 1/120 секунды.

   Длина витка составит πD, число доменов на нем πD/a, в которых записано πD/a/8 байт информации. Поскольку одновременно читаются обе стороны пластины, то скорость чтения дополнительно умножим на 2. Итоговая скорость составит (в мегабайтах за секунду)

$$\mathrm{v} = \frac{0{,}25\cdot\pi\cdot \mathrm{D}/\mathrm{a}}{1/120}/(1\cdot10^{6}) = 9\cdot10^{-5}\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{a}}$$

$$v_{max} = 9\cdot10^{-5}\cdot D_{max}/a = 9\cdot10^{-5}\cdot9{,}1/(36\cdot10^{-7}) \approx \underline{\textbf{228 мегабайт/сек}}$$

   Соотношение минимальной и максимальной скоростей составит

$$D_{max}/D_{min} = 9.1/3{,}7 \approx \underline{\textbf{2,5 раза}}$$

Решение задачи 8. Свойства квадратных нанокластеров

1. По условию, $\mathbf{c} = \mathbf{e}^2 + \mathbf{d}^2$

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{e}^2 + \mathbf{d}^2)^2 = \mathbf{e}^4 + 2\mathbf{e}^2\mathbf{d}^2 + \mathbf{d}^4 = \mathbf{e}^4 - 2\mathbf{e}^2\mathbf{d}^2 + \mathbf{d}^4 + 4\mathbf{e}^2\mathbf{d}^2 = (\mathbf{d}^2 - \mathbf{e}^2)^2 + (2\mathbf{ed})^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2$$

   Таким образом, квадрат **Sc** можно разбить на квадраты со сторонами $\mathbf{b} = \mathbf{d}^2 - \mathbf{e}^2$ и $\mathbf{a} = 2\mathbf{ed}$ (поскольку **b** > **a** и **d** > **e**).

   Тройка чисел **a**, **b** и **c** носит название Пифагоровой тройки.

2. Переберем возможные по условию значения **e** (от 2 до 9):

   e = 2, **d** = 11: **c** = $2^2 + 11^2$ = 125 – не является простым
   e = 3, **d** = 11: **c** = $3^2 + 11^2$ = 130 – не является простым
   e = 4, **d** = 22: **c** = $4^2 + 22^2 = 500$ – не является простым
   e = 5, **d** = 22: **c** = $5^2 + 22^2$ = 509, **a** = 2·5·22 = 220, **b** = $22^2 - 5^2$ = 459
   e = 6, **d** = 33: **c** = $6^2 + 33^2$ = 1125 – не является простым
   e = 7, **d** = 33: **c** = $7^2 + 33^2$ = 1138 – не является простым
   e = 8, **d** = 44: **c** = $8^2 + 44^2$ = 2000 – не является простым
   e = 9, **d** = 44: **c** = $9^2 + 44^2$ = 2017, **a** = 2·9·44 = 792, **b** = $44^2 - 9^2$ = 1855

В итоге, все случаи, кроме двух, приводят к очевидно не простым ($\vdots 2$ либо $\vdots 5$) значениям **c**. Оставшиеся два решения нет необходимости проверять на простоту **c**, поскольку, по условию, имеется ровно два решения.

3. По условию, **c** и **b** – простые числа.

   В то же время, согласно свойствам квадратных кластеров, **b** можно разложить на множители как разность квадратов: $\mathbf{b} = \mathbf{d}^2 - \mathbf{e}^2 = (\mathbf{d} - \mathbf{e})(\mathbf{d} + \mathbf{e})$. Чтобы **b** при этом оставалось простым необходимо, чтобы $\mathbf{d} - \mathbf{e} = 1$, то есть, $\mathbf{d} = \mathbf{e} + 1$. Тогда $\mathbf{c} = 2\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e} + 1$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e} + 1$ и $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) = 2\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}$. Кроме того, интересным следствием является вывод о том, что $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 1$.

   Таким образом, поскольку **a** кратно 2 ($\mathbf{a} = 2\mathbf{ed}$, см. п.1), вопрос сводится к тому, чтобы доказать, что $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 30$.

   1) Поскольку выражение $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1)$ представляет собой произведение двух последовательных целых чисел, то $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 2$.

   2) Рассмотрим два случая. а) Если $\mathbf{e} \vdots 3$, то $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 3$.
   б) Допустим, что **e** не делится на 3: $\mathbf{e} = 3\mathbf{k} \pm 1$.
   $\mathbf{e} = 3\mathbf{k} + 1$: $\mathbf{a} = 2(3\mathbf{k} + 1)(3\mathbf{k} + 2) = 18\mathbf{k}^2 + 18\mathbf{k} + 4$ (**a** не делится на 3),
   но при этом $\mathbf{b} = (3\mathbf{k} + 2)^2 - (3\mathbf{k} + 1)^2 = 6\mathbf{k} + 3$ – что противоречит условию (**b** – простое число);
   либо $\mathbf{e} = 3\mathbf{k} - 1$: $\mathbf{a} = 6\mathbf{k}(3\mathbf{k} - 1) \vdots 3$.

   Следовательно, мы доказали, что при всех **e**, удовлетворяющих условию, $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 3$.

   3) Рассмотрим два случая. а) Если $\mathbf{e} \vdots 5$, то $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 5$.
   б) Допустим, что **e** не делится на 5: $\mathbf{e} = 5\mathbf{k} \pm 1$ или $\mathbf{e} = 5\mathbf{k} \pm 2$.
   $\mathbf{e} = 5\mathbf{k} + 1$: $\mathbf{a} = 2(5\mathbf{k} + 1)(5\mathbf{k} + 2) = 50\mathbf{k}^2 + 30\mathbf{k} + 4$,
   но при этом $\mathbf{c} = (5\mathbf{k} + 1)^2 + (5\mathbf{k} + 2)^2 = 50\mathbf{k}^2 + 30\mathbf{k} + 5$ – что противоречит условию (**c** – простое число);
   либо $\mathbf{e} = 5\mathbf{k} - 1$: $\mathbf{a} = 10\mathbf{k}(5\mathbf{k} - 1) \vdots 5$.
   $\mathbf{e} = 5\mathbf{k} + 2$: $\mathbf{a} = 2(5\mathbf{k} + 2)(5\mathbf{k} + 3) = 50\mathbf{k}^2 + 50\mathbf{k} + 12$,
   но при этом $\mathbf{b} = (5\mathbf{k} + 3)^2 - (5\mathbf{k} + 2)^2 = 10\mathbf{k} + 5$ – что противоречит условию (**b** – простое число);
   $\mathbf{e} = 5\mathbf{k} - 2$: $\mathbf{a} = 2(5\mathbf{k} - 2)(5\mathbf{k} - 1) = 50\mathbf{k}^2 - 30\mathbf{k} + 4$, но при этом $\mathbf{c} = (5\mathbf{k} - 2)^2 + (5\mathbf{k} - 1)^2 = 50\mathbf{k}^2 - 30\mathbf{k} + 5$ – что противоречит условию (**c** – простое число).
   Следовательно, мы доказали, что при всех **e**, удовлетворяющих условию, $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 5$.

   4) Поскольку, в общем случае, $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 2$, $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 3$ и $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 5$, то $\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1) \vdots 30$, то есть, при условии $\mathbf{d} = \mathbf{e} + 1$ ($\mathbf{c} = 2\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e} + 1$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e} + 1$ и $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}(\mathbf{e} + 1)$) выполняется условие $\mathbf{a} \vdots 60$.

5) Найдем минимальное значение **d**:

$$2d^2 - 2d \geq 60$$

$$d^2 - d - 30 \geq 0,\ d = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

$$(d + 5)(d - 6) \geq 0$$

Поскольку **d** > 0, то условие **d** $\leq$ -5 не имеет смысла. Следовательно, **d** $\geq$ 6, что соответствует условию **d** > 4.

Действительно, при **d** = 4 **a** = 2·4·(4 – 1) = 24, не делится на 60.