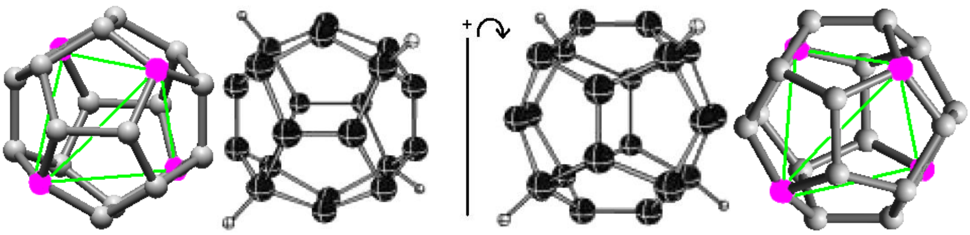
Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 1. Гидрирование C_{20}

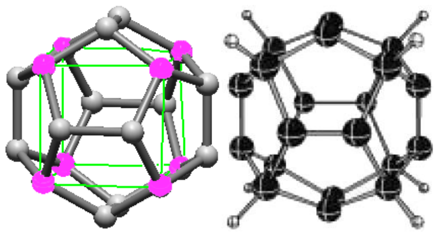
Фуллерен C_{20} представляет собой правильный двадцативершинник – додекаэдр. Таким образом, данная задача сводится к поиску правильных многогранников, вписанных в додекаэдр так, что их вершины совпадают. Таких многогранников два: тетраэдр и куб.

То есть, условию удовлетворяют:

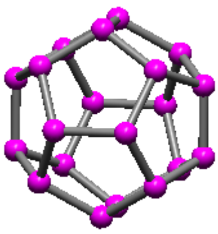
$C_{20}H_4$ (тетраэдр, пара зеркальных изомеров, правый после отражения и поворота на 90 градусов переходит в левый):



$C_{20}H_8$ (куб)



$C_{20}H_{20}$ (додекаэдр)



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 2. Статистические сополимеры

1. Полимер длиной 24 можно разбить блоки равной длины пятью способами (делители 12):

x = 1, **n** = 24/2**x** = 12, $N_1 = C_2^1 = 2$ (два варианта структуры блока: **(AB)$_{12}$** и **(BA)$_{12}$**)

x = 2, **n** = 24/2**x** = 6, $N_2 = C_4^2 - N_1 = \frac{4!}{2!2!} - 2 = 4$ (учет того, что **(AB)$_{12}$** и **(ABAB)$_6$** – это один и тот же сополимер)

x = 3, **n** = 24/2**x** = 4, $N_3 = C_6^3 - N_1 = \frac{6!}{3!3!} - 2 = 18$ (учет того, что **(AB)$_{12}$** и **(ABABAB)$_4$** – это один и тот же сополимер)

x = 4, **n** = 24/2**x** = 3, $N_4 = C_8^4 - N_1 - N_2 = \frac{8!}{4!4!} - 2 - 4 = 64$

x = 6, **n** = 24/2**x** = 2, $N_5 = C_{10}^5 - N_1 - N_2 - N_3 = \frac{10!}{5!5!} - 2 - 4 - 18 = 900$

x = 12 – не удовлетворяет условию **n** > 1 (не является полимером)

Общее число вариантов регулярного расположения звеньев равно
$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_6$ = 2 + 4 + 18 + 64 + 900 = 988

2.

1) Общее число вариантов сополимера **A$_{12}$B$_{12}$**

$$N_{all} = C_{24}^{12} = \frac{24!}{12!12!} = 2704156$$

2) Вероятность регулярной структуры равна

$$P = \frac{N}{N_{all}} = \frac{988}{2704156} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-4}$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 3. Перекладывание атомов в кубиках

а.

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 = n^3$$

$n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_2 + 1 = n_1 + 2$, $n = n_3 + 1 = n_1 + 3$

$$n_1^3 + (n_1 + 1)^3 + (n_1 + 2)^3 = (n_1 + 3)^3$$

$$2n_1^3 - 12n_1 - 18 = 0$$

$$n_1^3 - 6n_1 - 9 = 0$$

Ищем натуральные корни среди делителей свободного члена (9):

$n_1 = 3$, $(n_1 - 3)(n_1^2 + 3n_1 + 3) = 0$

$n_2 = n_1 + 1 = 4$,

$n_3 = n_2 + 1 = n_1 + 2 = 5$,

$n = n_3 + 1 = n_1 + 3 = 6$

$N = 6^3 = 216$.

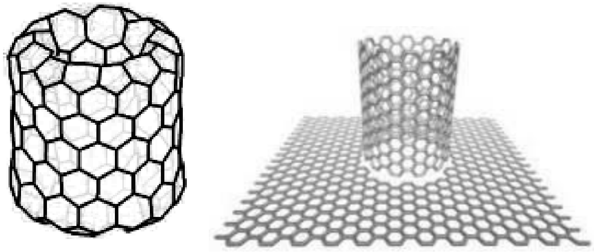
б. Предположим, что атомы одного кубического нанокластера можно поделить поровну между двумя другими кубическими нанокластерами, тогда $2n_4^3 = n^3$ и $n = \sqrt[3]{2}n_4$. Поскольку полученная величина $n \notin N$, следовательно, <u>такой вариант невозможен</u>.

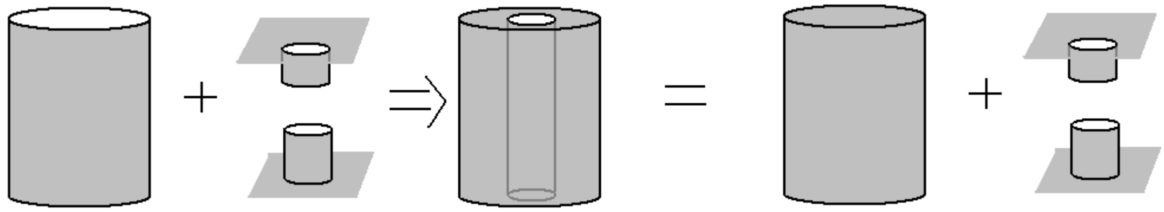
в. <u>*Куб натурального числа не может быть представлен в виде суммы кубов натуральных чисел*</u> (следствие из Великой теоремы Ферма, несмотря на кажущуюся простоту формулировки, теорема была доказана лишь недавно).

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 4. Углеродный нанобублик

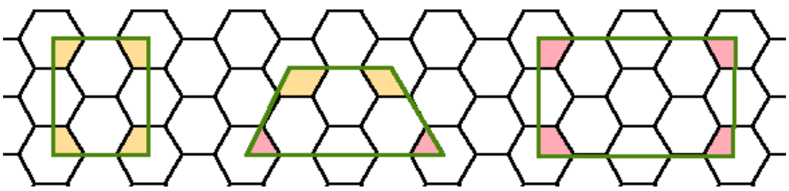
1.





Если мы возьмем нанотрубку и закроем ее торцы переходниками нанотрубка-графен, то такой нанотор также можно представить в виде фуллерена, на торцах которого создали переходники графен-нанотрубка (см. рисунок). Таким образом, минимальное число дефектов такого нанотора будет складываться из минимального числа дефектов фуллерена + удвоенного минимального числа дефектов в переходнике графен-нанотрубка, т.е. из 12 пятиугольников и 12 (6·2) семиугольников. Стоит отметить, что возможен другой принцип построения нанотора (не указанный в задаче), при котором изгиб и замыкание нанотрубки происходит за счет геометрического искажения ее шестиугольников так, что она, изгибаясь, замыкается сама на себя без дополнительного образования семи- и пятиугольных дефектов.

2. 1) Изображенный на рисунке нанотор можно представить как шестиугольную «гайку», поверхность которой состоит из *шести* малых прямоугольников, образующих внутреннее отверстие, *шести* внешних прямоугольников, а также *двенадцати* одинаковых трапеций (желтым цветом отмечены части семиугольников, розовым - пятиугольников).



Рассчитаем число вершин, отвечающее каждому из элементов поверхности тора (учитывая, что вершина, лежащая на границе элемента, принадлежит этому элементу лишь наполовину):

	Малый прямоугольник	Трапеция	Большой прямоугольник	Всего вершин
V	6 + 4·0,5 = 8	4 + 10·0,5 = 9	12 + 8·0,5 = 16	8·6 + 9·12 + 16·6 = 252

2) Диаметр «полости» равен диаметру углеродной нанотрубки, которую характеризуют индексы хиральности (**n**,0), где

$$n = 2 + 1{,}5 + 2 + 1{,}5 = 7$$

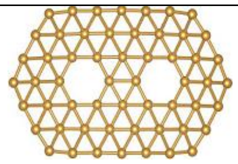
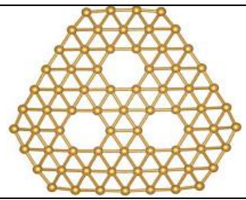
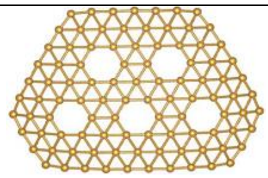
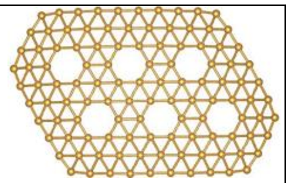
(Высота малого прямоугольника + высота трапеции + высота большого прямоугольника + высота трапеции, выраженные через малую диагональ шестиугольника).

Тогда

$$D = \frac{a\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n^2 + nm + m^2} = \frac{0{,}14 \cdot \sqrt{3}}{3{,}14}7 = 0{,}54 \text{ нм.}$$

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 5. Гомологический ряд борофенов

1.

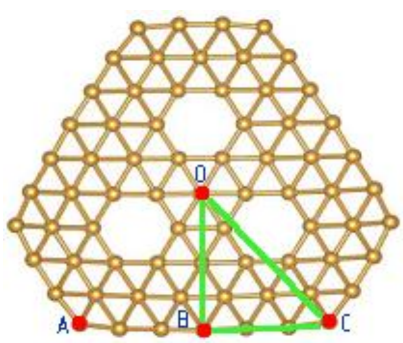
B_n					
x	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
n(x)	**56**	**70** = 56 + 14	?	**98** = 70 + 28	**112** = 98 + 14

$$n(x) = 56 + 14(x - 1) = 42 + 14x$$

2. Шаг последовательности равен 14 и отвечает удалению одного атома из центра ребра длиной 7 атомов бора с одновременной достройкой трапеции из 15 атомов бора (6+5+4) вдоль этого ребра.

3. n(3) = 84

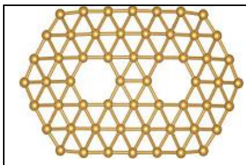
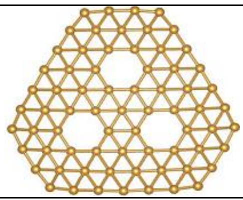
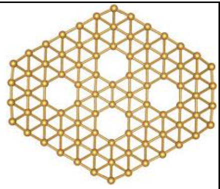
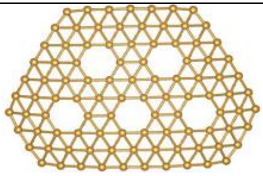
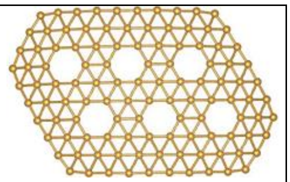
4. Кластер B_{70} представляет собой усеченный треугольник.



$$R = \sqrt{BC^2 + OB^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2} = a\sqrt{9 + 12} = a\sqrt{21} = 0{,}16 \cdot \sqrt{21}$$

R = **<u>0,73</u>** нм.

5.

				
x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
L = 7,5a	L = 9a	L = 10,5a	L = 12a	L = 13,5a

$$L(x) = (7{,}5 + 1{,}5(x-1))a = (6 + 1{,}5x)a = 0{,}16 \cdot (6 + 1{,}5x)$$

6. Соотношение атомов бора и дефектов в бесконечно длинной ленте составляет

$$\lim_{x\to 0} \frac{n(x)}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{42+14x}{x+1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{28}{x+1} + 14\right) = 14 .$$

На треугольник, соединяющий центры трех дефектов, приходится $6/2 + 1 = 4$ атома бора. В тоже время, один дефект приходится на 6 таких треугольников, то есть, на один треугольник приходится $3/6 = 1/2$ дефектов. Соотношение атомов бора и дефектов в бесконечно большом листе (когда долей краевых атомов бора можно пренебречь) составляет: 4 (= 6/2 + 1 атома бора, приходящиеся на треугольник, соединяющий центры трех дефектов):0,5 (дефектов приходится на один треугольник, поскольку один дефект приходится на 6 таких треугольников) = 8:1, то есть, на каждые 8 атомов приходится один дефект.

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 6. Икосаэдрические фуллерены и индексы хиральности

1. Запишем число атомов в икосаэдрическом фуллерене как функцию от суммы индексов хиральности:

$$N = 20(n^2 + nm + m^2) = 20(n^2 + 2nm + m^2 - nm) = 20((n+m)^2 - nm) = 20(c^2 - n(c-n))$$
$$N = 20(c^2 - cn + n^2)$$

Максимальному значению числа атомов $\mathbf{N_{max}}$ отвечает минимальное значение величины, вычитаемой из константы $20\mathbf{c^2}$: $20\mathbf{n}(\mathbf{c} - \mathbf{n}) = 0$, то есть либо $\mathbf{n} = 0$, либо $\mathbf{c} - \mathbf{n} = 0$. При этом $\mathbf{m} = \mathbf{c}$ (или $\mathbf{n} = \mathbf{c}$) и $\mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{c}) = \mathbf{N}(\mathbf{c},\mathbf{0}) = 20\mathbf{c}^2$.

**В условии задачи была допущена неточность: для фуллеренов вместо $n, m \in N_0$ было указано $n, m \in N$. Все решения, выполненные с учетом $n, m \in N$, оценивались полным баллом.*

Чтобы найти значение **n**, отвечающее $\mathbf{N_{min}}$, запишем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$N'(n) = 20(-c + 2n) = 0,$$

то есть, $2\mathbf{n} - \mathbf{c} = 0$ или $\mathbf{n} = 0{,}5\mathbf{c}$. Значение второй производной

$$N''(n) = 40 > 0$$

подтверждает, что найденный экстремум отвечает минимуму функции $\mathbf{N}(\mathbf{n})$.

Поскольку $n, m \in N$, то $\mathbf{n} = 0{,}5\mathbf{c}$ справедливо только для $c \,\vdots\, 2$. Для нечетных значений **c** ближайшим целым значением **n** будет $0{,}5\mathbf{c} - 0{,}5$.

Тогда для $c \,\vdots\, 2$ второй индекс равен $\mathbf{m} = \mathbf{c} - 0{,}5\mathbf{c} = 0{,}5\mathbf{c}$ и минимальное число атомов равно $\mathbf{N}(0{,}5\mathbf{c},0{,}5\mathbf{c}) = 20\cdot3\cdot0{,}25\cdot\mathbf{c}^2 = 15\mathbf{c}^2$, а нечетных значений **c** второй индекс равен $\mathbf{m} = \mathbf{c} - 0{,}5(\mathbf{c} - 1) = 0{,}5\mathbf{c} + 0{,}5$ и минимальное число атомов равно

$$N\left(\frac{c-1}{2},\frac{c+1}{2}\right) = 20\left(\left(\frac{c-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{c+1}{2}\right) + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2\right) = 5(3c^2+1)$$

Таким образом, $\mathbf{N_{max}}(\mathbf{c}) = 20\mathbf{c}^2$ (для икосаэдрических фуллеренов с индексами $(\mathbf{0},\mathbf{c})$ и $(\mathbf{c},\mathbf{0})$), $\mathbf{N_{min}}(\mathbf{c}) = 15\mathbf{c}^2$ (для $c \,\vdots\, 2$ и икосаэдрических фуллеренов с индексами $(0{,}5\mathbf{c},0{,}5\mathbf{c})$) либо $\mathbf{N_{min}}(\mathbf{c}) = 5(3\mathbf{c}^2 + 1)$ (для нечетного **c** и икосаэдрических фуллеренов с индексами $(0{,}5\mathbf{c} - 0{,}5,\ 0{,}5\mathbf{c} + 0{,}5)$).

2. $\mathbf{F_1}$: **c** = 1, **n** = 0, **m** = 1, **N**(0,1) = 20. Ряд состоит из одного икосаэдрического фуллерена.

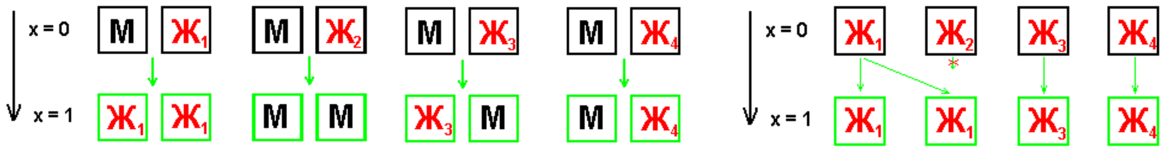
3. $\mathbf{F_2}$: **c** = 2,
   минимальное число атомов: **n** = 0, **m** = 2, **N**(0,2) = 80;
   максимальное число атомов: **n** = 1, **m** = 1, **N**(1,1) = 60.
   Ряд состоит только из этих двух икосаэдрических фуллеренов.

4. $N_{max}(0,2017) = 20 \cdot 2017^2 = 81365780$, $N_{min}(1008,1009) = 5(3 \cdot 2017^2 + 1) = 61024340$.
   В ряду $\mathbf{F_{2017}}$ индекс **n** проходит все значения от 0 до 1008, то есть, ряд содержит 1009 икосаэдрических фуллеренов.

М МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 7. Митохондриальная Ева и ближайший общий предок

1. В первом поколении в каждой семье рождается по 2 ребенка, следовательно, первое поколение состоит из родственных пар детей и $\boldsymbol{\omega}_{n1}$ = 1/2 = 0,5. Всего возможно 4 варианта пола детей в семье: ЖЖ, ММ, ЖМ, МЖ. Таким образом, передача митохондрий по материнской линии будет происходить в среднем для 3-х из 4-х женщин (см. рис), а также 3 из 4-х женщин будут иметь разных матерей. Следовательно, $\boldsymbol{\omega}_{ne1}$ = 3/4 = 0,75.



а) б)

2.
   а. В поколении **1** из 2048 не более 2-х человек могут иметь одного и того же предка в поколении **0**.
   В поколении **2** из 2048 не более 2^2 = 4-х человек могут иметь одного и того же предка в поколении **0**.
   В поколении **3**, соответственно, 2^3 = 8.
   В поколении **x** – $2^{\mathbf{x}}$.
   Если при этом общий родственник из поколения **0** есть у любого человека из популяции, то 2048 = $2^{\mathbf{x}}$. Тогда **x** = $\log_2 2048$ = 11 и $\mathbf{t}_{min}$ = x·$\mathbf{t}_0$ = 11·20 = **<u>220</u>** лет.

   б. Суммарное число предков у любого члена популяции из поколения, отвечающего времени $\mathbf{t}_{min}$, составляет

$$S=\sum_{1}^{11}2^{k}=2\left(2^{11}-1\right)$$
= **<u>4094</u>** человек.

3. Пример программы на языке Pascal (PascalABC.NET http://pascalabc.net/):

```
{моделирование времени te, за которое возникает Митохондриальная Ева}
const n = 1024; {число женщин в популяции}
const t0 = 20; {время смены поколений}
var
    i, r, Ptmp, flag, x, te: integer;
    P: array[1..n] of integer;
BEGIN

x := 0; {начинаем с нулевого поколения}
for i := 1 to n do P[i] := i; {заполняем элементы массива P условными номерами от 1 до n мтДНК матерей из нулевого поколения}

{пока флаг равен единице (не все элементы в массиве P идентичны), производим циклическую смену поколений}
flag := 1;
while flag = 1 do
  begin
  {для этого сначала случайным образом перемешиваем весь массив}
  for i := 1 to n do
```

```
    begin

    r := Random(n) + 1;
    Ptmp := P[i];
    P[i] := P[r];
    P[r] := Ptmp;
end;

{передаем условные номера мтДНК матерей из поколения 0 в следующее поколение.
Представим массив P разбитым на четверки элементов: P[4*i+1] P[4*i+2] P[4*i+3] P[4*i+4] (где i от 0 до 1024/4-1). Согласно п.1 решения, необходимо заменить значение, например, второго элемента в четверке на значение первого элемента}
  x := x + 1;
  for i := 0 to Round(n/4)-1 do P[4*i+2] := P[4*i+1];

{затем проверяем, имеются ли в массиве P не идентичные элементы, для этого достаточно сравнить все элементы массива с первым; если все элементы массива P будут равны первому (образовалась Ева), то флаг останется равным нулю и цикл смены поколений прекратится}
  flag := 0;
  for i:=2 to n do if P[1] <> P[i] then flag := 1;
  end;
te := x*t0;
writeln ('Прошло ', te, ' лет');
END.

{моделирование времени te за которое возникает Митохондриальная Ева}
const n = 1024; {число женщин в популяции}
const t0 = 20; {время смены поколений}
var
    i, r, Ptmp, flag, x, te: integer;
    P: array[1..n] of integer;
BEGIN

x := 0; {начинаем с нулевого поколения}
for i := 1 to n do P[i] := i; {заполняем элементы массива P условными номерами от 1 до n мтДНК матерей из нулевого поколения}

{пока флаг равен единице (не все элементы в массиве P идентичны), производим циклическую смену поколений}
flag := 1;
while flag = 1 do
  begin
  {для этого сначала случайным образом перемешиваем весь массив}
  for i := 1 to n do
    begin
    r := Random(n) + 1;
    Ptmp := P[i];
    P[i] := P[r];
    P[r] := Ptmp;
end;

{Передаем условные номера мтДНК матерей из поколения 0 в следующее поколение. Представим массив P разбитым на четверки элементов: P[4*i+1] P[4*i+2] P[4*i+3] P[4*i+4] (где i от 0 до 1024/4-1). Согласно п.1 решения, необходимо заменить значение, например, второго элемента в четверке на значение первого элемента}
  x := x + 1;
  for i := 0 to Round(n/4)-1 do P[4*i+2] := P[4*i+1];
```

```
{затем проверяем, имеются ли в массиве P не идентичные элементы, для этого
достаточно сравнить все элементы массива с первым; если все элементы
массива P будут равны первому (образовалась Ева), то флаг останется равным
нулю и цикл смены поколений прекратится}
  flag := 0;
  for i:=2 to n do if P[1] <> P[i] then flag := 1;
  end;
te := x*t0;
writeln ('Прошло ', te, ' лет');
END.
```

Пример 20 значений числа поколений $\mathbf{t_e}$, полученных в результате работы программы:

106580 57940 128300 43760 40460 54860 77680 57940 47860 150720 166480 99020
74120 50340 55920 57700 44160 101000 74740 81540

Усредняя, получаем $\mathbf{t_{ecp}}$ = **78556** лет. Полученное экспериментально таким способом $\mathbf{t_{ecp}}$ обычно находится в пределах 60 000 – 100 000 лет.

Справочное значение составляет $\mathbf{t_{ecp}} = \mathbf{t_0} 2\mathbf{n}$ = **81920** лет (эта цифра будет использована для дальнейших расчетов)

$\mathbf{t_e}/\mathbf{t_{min}}$ = 81920/220 ≈ **372**.

4. n = 200000/81920·2048 **= 5000** человек.

Комментарии к решению. Популяция превращается в одну родственную группу (т.е., возникает БОП) быстрее, чем в ней возникает митохондриальная Ева. Время возникновения БОП, как правило, пропорционально логарифму размера популяции, а время возникновения митохондриальной Евы пропорционально размеру популяции. По некоторым данным, все человечество примерно 130 000 лет назад состояло из нескольких десятков тысяч человек. Использование даже такой грубой модели дает близкую по порядку величины оценку.

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 8. Контактное число

1. Рассмотрим два круга равного диаметра, касающихся друг друга. Отрезок AB = 2r, соединяющий их центры, отрезок BC, представляющий собой касательную ко второму кругу, проведенную из центра первого и отрезок CA = r, соединяющий точку касания и центр второго круга, образуют прямоугольный ΔABC с углом

$$\alpha = \angle ABC = \arcsin\left(\frac{r}{2r}\right) = 30^\circ .$$

Таким образом, при касании двух кругов, один из них закрывает для другого «угол обзора», равный 2·30° = 60°. Следовательно, вокруг одного круга могут поместиться только $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ кругов того же радиуса.

2. Степень заполнения равна соотношению площади, занятой кругами, к площади треугольника, соединяющего центры трех соприкасающихся кругов радиуса **r**:

$$\varphi = \frac{S_o}{S_\Delta} = \frac{0{,}5 \cdot \pi r^2}{0{,}5(2r)^2 \sin 60^\circ} = \frac{\pi}{4 \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}91$$

$$N = \frac{S\varphi}{S_1} = \frac{4\pi R^2 \varphi}{\pi R_1^2} = \frac{4R^2\varphi}{R_1^2} = \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 0{,}91}{0{,}1^2} = 36400$$

3. При касании двух шаров равного диаметра, один из них закрывает для второго «область обзора», которую можно представить в виде конуса с углом 60°. Такой конус отсекает на сфере радиуса **R’** шаровой сектор площадью

$$S_{at} = 2\pi R'h = 2\pi R'\left(R' - \sqrt{R'^2 - (R'/2)^2}\right) = 2\pi R'^2\left(1 - \sqrt{3}/2\right).$$

Это составляет

$$\frac{S_{at}}{S_s} = \frac{2\pi R'^2\left(1 - \sqrt{3}/2\right)}{4\pi R'^2} = 0{,}067$$

долю от общей площади сферы.

Таким образом, площадь сферы в $\frac{1}{0{,}067} = 14{,}93$ раза больше площади, занимаемой проекцией одного шара.

4. $S_{\Delta ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$,

где $\alpha = \beta = \gamma = \arccos\frac{1}{3}$ - двугранный угол в тетраэдре.

Тогда

$$\frac{S_s}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\pi R'^2}{R'^2\left(3\arccos(1/3) - \pi\right)} = \frac{4}{0{,}1755} = 22{,}79$$

сферических треугольника может разместиться на сфере.

Теорема Эйлера: **V – E + F = 2**.

F = 22 - число треугольных граней
E = 3/2**F** = 33 - число ребер (у каждой грани три ребра, каждое ребро принадлежит двум граням)

Следовательно, **V** = 2 – **F** + **E** = 2 – 22 + 33 = 13.

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Чертова дюжина

1. Число граней $F = F_3 + F_4 + F_6$,

вершин $V = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{m} = 12$ (каждая вершина принадлежит **m** ребрам),

ребер $E = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{2} = \dfrac{mV}{2} = 6m$ (каждое ребро принадлежит двум граням).

Запишем для искомых многогранников:

1) число граней $F = F_3 + F_4 + F_6$ (треугольные, квадратные и шестиугольные),
2) вершин $V = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{m} = 12$ (каждая вершина принадлежит **m** ребрам),
3) ребер $E = \dfrac{3F_3 + 4F_4 + 6F_6}{2} = \dfrac{mV}{2} = 6m$ (каждое ребро принадлежит двум граням).

Тогда теорема Эйлера:

$$12 - 6m + F_3 + F_4 + F_6 = 2$$

или

$$F_3 + F_4 + F_6 = 6m - 10$$

В тоже время,

$$3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 12m\,.$$

Таким образом, получена система из двух уравнений с четырьмя неизвестными. Для нахождения всех возможных решений поварьируем значение **m**, а также все возможные пары типов граней.

1) **m** = 3

$F_3 + F_4 + F_6 = 8$

$3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 36$

1.1) $F_3 = 0$

$F_4 + F_6 = 8$, $4F_4 + 6F_6 = 36$; $F_4 = 8 - F_6$, $4(8 - F_6) + 6F_6 = 36$; $F_6 = 2$, $F_4 = 6$

Многогранник – <u>шестиугольная призма</u> (2 шестиугольных и 6 квадратных граней, 18 ребер).

1.2) $F_4 = 0$

$F_3 + F_6 = 8$, $3F_3 + 6F_6 = 36$; $F_3 = 8 - F_6$, $3(8 - F_6) + 6F_6 = 36$; $F_6 = 4$, $F_3 = 4$

Многогранник – усеченный тетраэдр (4 шестиугольных и 4 треугольных грани, 18 ребер).

1.3) $F_6 = 0$

$F_3 + F_4 = 8$, $3F_3 + 4F_4 = 36$, $F_3 = 8 - F_4$, $3(8 - F_4) + 4F_4 = 36$, $F_4 = 12$, $F_3 = -4$,

нет решения в натуральных числах

2) **m** = 4

$$F_3 + F_4 + F_6 = 14$$
$$3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 48$$

2.1) $F_3 = 0$

$F_4 + F_6 = 14$, $4F_4 + 6F_6 = 48$, $F_4 = 14 - F_6$, $4F(14 - F_6) + 6F_6 = 48$, $F_6 = -4$, $F_4 = 18$,

нет решения в натуральных числах

2.2) $F_4 = 0$

$F_3 + F_6 = 14$, $3F_3 + 6F_6 = 48$, $F_3 = 14 - F_6$, $3(14 - F_6) + 6F_6 = 48$, $F_6 = 2$, $F_3 = 12$

Многогранник – шестиугольная антипризма (2 шестиугольных и 12 треугольных граней, 24 ребра).

2.3) $F_6 = 0$

$F_3 + F_4 = 14$, $3F_3 + 4F_4 = 48$, $F_3 = 14 - F_4$, $3(14 - F_4) + 4F_4 = 48$, $F_4 = 6$, $F_3 = 8$

Многогранник – кубооктаэдр (трехскатный повернутый бикупол), а также трехскатный прямой бикупол (6 квадратных и 8 треугольных граней, 24 ребра).

3) **m** = 5

$$F_3 + F_4 + F_6 = 20$$
$$3F_3 + 4F_4 + 6F_6 = 60$$

3.1) $F_3 = 0$

$F_4 + F_6 = 20$, $4F_4 + 6F_6 = 60$, $F_4 = 20 - F_6$, $4(20 - F_6) + 6F_6 = 60$, $F_6 = -10$, $F_4 = 30$,

нет решения в натуральных числах

3.2) $F_4 = 0$

$F_3 + F_6 = 20$, $3F_3 + 6F_6 = 60$, $F_3 = 20 - F_6$, $3(20 - F_6) + 6F_6 = 60$, $F_6 = 0$, $F_3 = 20$

Многогранник – икосаэдр (20 треугольных граней, 30 ребер).

3.3) $F_6 = 0$

$$F_3 + F_4 = 20 \qquad F_3 = 20 - F_4 \qquad F_6 = 0$$
$$3F_3 + 4F_4 = 60, \qquad 3F(20 - F_4) + 4F_4 = 60, \qquad F_3 = 20$$

Многогранник – икосаэдр (20 треугольных граней, 30 ребер).

При наличии у искомого многогранника граней F_n с $n \geq 7$ возможны еще 4 решения:
m = 3, $F_3 = 5$, $F_7 = 3$ – тип 1 (невозможно построить),
m = 3, $F_3 = 6$, $F_9 = 2$ – тип 2 (невозможно построить для граней в виде правильных многоугольников),
m = 3, $F_4 = 7$, $F_8 = 1$ – тип 3 (невозможно построить),
m = 4, $F_3 = 13$, $F_9 = 1$ – тип 4 (невозможно построить).
Невозможно построить: значит, что, нарисовав один из многоугольников и пытаясь расположить внутри него оставшиеся вершины (чтобы построить плоскую проекцию) согласно найденным решениям, мы неизбежно приходим к противоречию, см. пример на рис. а.3)

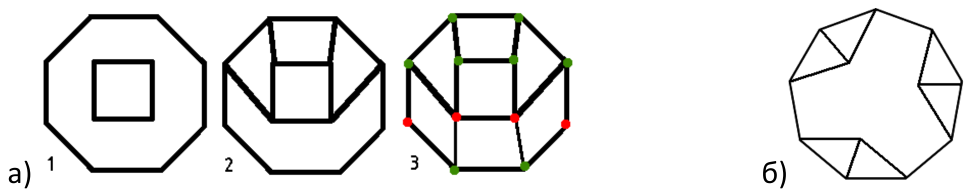


Рис. а) Попытка построения плоской проекции многогранника типа 3 (остаются вершины с m ≠ 3), б) многогранник типа 2, один из девятиугольников которого не является правильным.

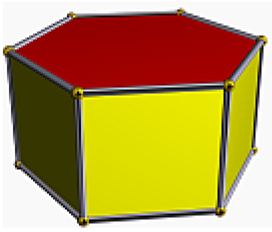
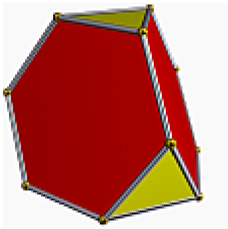
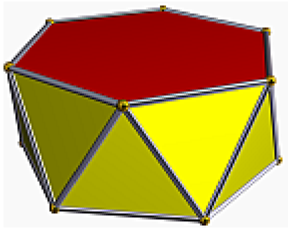
2. При наличии поворотной оси пятого порядка возможны два варианта размещения атомов относительно нее: либо атом лежит на этой оси, либо пять атомов переводятся друг в друга при повороте (т.е., ось проходит через центр пятиугольной грани). Второй вариант невозможен по условию.

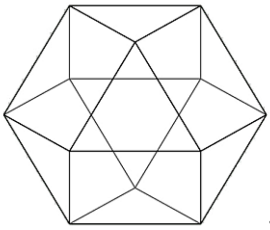
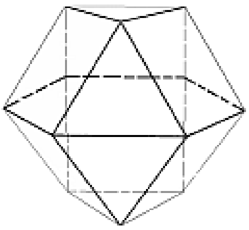
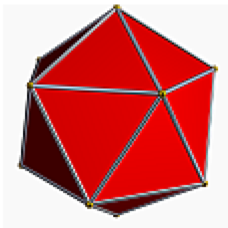
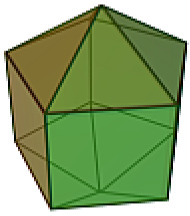
   Таким образом, при реализации первого варианта два атома из 12-ти лежат на поворотной оси пятого порядка, а остальные 10 разбиты на 5 идентичных групп (по 2 атома), которые переводятся друг в друга поворотом вокруг оси.

   Взаимное расположение пятерки атомов вокруг атома, лежащего на поворотной оси, задано симметрией, поэтому оболочку можно представить соединенной из 2-х шапочек 1+5 (пятиугольная пирамида).

   Такие шапочки можно скомбинировать либо с поворотом на угол $\frac{\pi}{5}$ друг относительно друга – получив при этом уже ранее найденный икосаэдр, либо симметрично (атом над атомом) – получив при этом удлиненную пятиугольную бипирамиду (10 треугольных и 5 квадратных граней, 25 ребер).

3. 1) <u>Шестиугольная призма</u> (2 шестиугольных и 6 квадратных граней, 18 ребер).
2) <u>Усеченный тетраэдр</u> (4 шестиугольных и 4 треугольных грани, 18 ребер).
3) <u>Шестиугольная антипризма</u> (2 шестиугольных и 12 треугольных граней, 24 ребра).
4а) <u>Кубооктаэдр (трехскатный повернутый бикупол)</u>, а также 4б) <u>трехскатный прямой бикупол</u> (6 квадратных и 8 треугольных граней, 24 ребра).
5) <u>Икосаэдр</u> (20 треугольных граней, 30 ребер).
6) <u>Удлиненная пятиугольная бипирамида</u> (10 треугольных и 5 квадратных граней, 25 ребер).

1) 
2) 
3) 

4а) 
4б) 
5) 
6) 

4.

1) <u>Шестиугольная призма</u>

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r.
Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг правильной шестиугольной призмы:

$$R = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a = \sqrt{5}r$$

, где a = 2r – длина ребра призмы, образованной центрами атомов оболочки.

$\sqrt{5}r > 2r$ - касания центрального атома с атомами оболочки нет (<u>кластер типа а</u>).

2) <u>Усеченный тетраэдр</u>

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r.
Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг усеченного тетраэдра:

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{22} = \frac{2r}{4}\sqrt{22} = \frac{r\sqrt{22}}{2}$$

, где a = 2r – длина ребра усеченного тетраэдра, образованного центрами атомов оболочки.

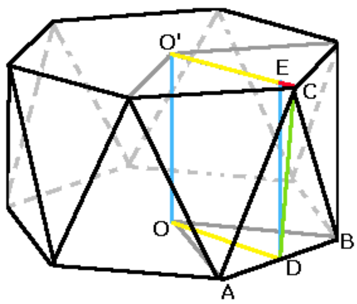
$\frac{r\sqrt{22}}{2} > 2r$ - касания центрального атома с атомами оболочки нет (<u>кластер типа а</u>).

3) Шестиугольная антипризма

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг правильной шестиугольной антипризмы:

$$R = \sqrt{a^2 + (H/2)^2} = \sqrt{4r^2 + r^2\left(\sqrt{3} - 1\right)} = r\sqrt{3 + \sqrt{3}},$$

где a = 2r – длина ребра шестиугольной антипризмы, образованной центрами атомов оболочки, H – ее высота.



Расчет высоты: по условию, **H** = **OO’** = **ED** и **AB** = **AC** = **BC** = **O’C** = **a**. Рассмотрим Δ**CDE**. **DC** = **OD** = **EO’** = **h**,

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ - высота правильного треугольника со стороной **a**.

CE = **O’C** – **EO’** = $a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} = b$.

$$H = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\left(2 - \sqrt{3}\right)^2}{4}} = a\sqrt{\sqrt{3} - 1}.$$

$r\sqrt{3 + \sqrt{3}} > 2r$ - касания центрального атома с атомами оболочки нет (кластер типа а).

4) Кубооктаэдр, а также трехскатный прямой бикупол

Все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг кубооктаэдра (трехскатного прямого бикупола) и равно длине его ребра, то есть расстоянию между центрами атомов в оболочке: $R = a = 2r$. Следовательно, все атомы оболочки касаются центрального атома (кластер типа б).

5) Икосаэдр

Предположим, что все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Тогда расстояние между центром центрального атома и центром любого атома оболочки равно радиусу сферы, описанной вокруг икосаэдра:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}a = \frac{r}{2}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\ ,$$

где a = 2r – длина ребра икосаэдра, образованного центрами атомов оболочки.

Но

$$\frac{r}{2}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} < 2r\,,$$

то есть, при условии касания соседних атомов оболочки мы не сможем поместить еще один атом в центр икосаэдра. Следовательно, центральный атом в икосаэдре касается каждого из атомов оболочки, а соседние атомы оболочки не касаются друг друга (кластер типа в).

6) Удлиненная пятиугольная бипирамида

Предположим, что все соседние атомы в оболочке касаются друг друга (по ребрам многогранника), то есть, расстояние между центрами пары атомов в оболочке равно 2r. Тогда несложно заметить, что расстояние между центром центрального атома и центрами атомов оболочки будет неодинаково: атомы, лежащие на поворотной оси пятого порядка, будут отстоять от центрального дальше, чем остальные 10 атомов. Следовательно, центральный атом в удлиненной пятиугольной бипирамиде касается каждого из атомов оболочки, но не все соседние атомы оболочки касаются друг друга (кластер типа в).

5.

1) Шестиугольная призма

Радиус сферы, описанной около кластера в форме правильной шестиугольной призмы, равен

$$R + r = r\left(\sqrt{5}+1\right) = 0{,}14\left(\sqrt{5}+1\right) = 0{,}45 \text{ нм.}$$

2) Усеченный тетраэдр

Радиус сферы, описанной около кластера в форме усеченного тетраэдра, равен

$$R + r = r\left(\frac{\sqrt{22}}{2}+1\right) = 0{,}14\left(\frac{\sqrt{22}}{2}+1\right) = 0{,}47 \text{ нм.}$$

3) Шестиугольная антипризма

Радиус сферы, описанной около кластера в форме шестиугольной антипризмы, равен

$$R + r = r\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}+1\right) = 0{,}14\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}+1\right) = 0{,}44 \text{ нм.}$$

4) Кубооктаэдр, а также трехскатный прямой бикупол

Радиус сферы, описанной около кластера в форме кубооктаэдра (трехскатного прямого бикупола), равен

$$R + r = 3r = 0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42 \text{ нм.}$$

5) Икосаэдр

Радиус сферы, описанной вокруг икосаэдра, образованного центрами атомов оболочки, равен $R = 2r$, а длина ребра этого икосаэдра –

$$a = \frac{8r}{\sqrt{2\left(5 + \sqrt{5}\right)}}.$$

Радиус сферы, описанной около кластера в форме икосаэдра, равен

$$R + r = 3r = 0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42 \text{ нм.}$$

6) Удлиненная пятиугольная бипирамида

Радиус сферы, описанной вокруг усеченного декаэдра, образованного центрами атомов оболочки, равен $R = 2r$.

Радиус сферы, описанной около кластера в форме усеченного декаэдра, равен

$$R + r = 3r = 0{,}14 \cdot 3 = 0{,}42 \text{ нм.}$$

МАТЕМАТИКА

Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 10. Триплетный Код Полуэкта

1. Число вариантов триплетов составляет $4^3 = 64$, этого хватит, чтобы закодировать необходимые Полуэкту 26 + 26 + 1 + 7 = 60 символов. Даже останется 4 неиспользованных триплета.
   При этом возможно всего
   $$\mathrm{A}_{64}^{60} = \frac{64!}{4!} \approx 5{,}29 \cdot 10^{87}$$
   вариантов триплетных кодировок.

2. Для решения необходимо будет или менять в тексте все угаданные символы аминокислот на разгаданные символы (либо в электронном виде в редакторе, либо в распечатке с помощью корректора), или подписывать разгаданные символы на распечатке между строк карандашом.

   Однако, поскольку число аминокислот (20) меньше числа букв в английском алфавите, при расшифровке будут неизбежны коллизии (одной аминокислоте могут соответствовать несколько букв), остается только надеяться на то, что Полуэкт подбирал кодировку так, чтобы коллизии не сильно затрудняли расшифровку. Также важно не забывать, что по условию каждому символу текста соответствует аминокислота и каждая аминокислота соответствует символу текста.

   Для начала в закодированном тексте необходимо разгадать разделители слов. Самый простой способ: догадаться, что последний символ “Y” – скорее всего, точка или другой знак препинания, поскольку он стоит в самом конце. В тексте мы видим еще 4 таких символа, и после каждого из них стоит символ “M” – это, вероятно, пробел.

   После подстановки получаем следующий текст:
   CNCWFVSANCDSNG RVRDSVP SPVNHDWC DP WCV WV HAV FWPH LPWFDPDCA RDPV SHDWCP WV HAV CNCWHVSACWGWADVP. CW RWCRVP HANH HAV PVSVCH CWKVG L PDSV RNP NRNPRVR VWP RVRVGWLFVCH WV HAV CNCWFNSADCVP SPVNHVR KT H AV KWHHWFIQL NLLPWNSA. DH RDGG NGGWR SPVNHDCA CNCWRVRDPVP RDHA SW CHPWGGNKGV FWRVFVCHP NH HAV CNCWPSNGV. RADSA SWQGR GVNR HW VQHQPV PVRWGQHDWC DC CVR FNHVPDNGP SPVNHDWC NCR RDPVNPV HPVNHFVCH. NCR FNT GVNR HW HAV AWGT APNDG WV CNCWHVSACWGWADVP I CNCWPWKWHP.

   Бросается в глаза обилие коротких слов HAV – это, вероятно, определенный артикль the. Слово “nano” примечательно тем, что первая и третья буквы у него одинаковы. Заметим, что первое слово начинается с “CNCW”, так же начинаются еще 7 других слов. Делаем замену H => t A => h V => e, C => n, N => a, W => o:

```
nanoFeShanDSaG ReRDSeP SPeatDon DP one oe the FoPt LPoFDPDnh RDPeStDonP oe the nanoteShnoGohDeP. no RonReP that the PeSent noKeG LPDSe RaP aRaPReR eoP ReReGoLFent oe the nanoFaShDneP SPeateR KT the KottoFIQL aLLPoaSh. Dt RDGG aGGoR SPeatDnh nanoReRDPeP RDth SontPoGGaKGe FoReFentP at the nanoPSaGe. RhDSh SoQGR GeaR to eQtQPe PeRoGQtDon Dn neR FatePDaGP SPeatDon anR RDPeaPe tPeatFent. anR FaT GeaR to the hoGT hPaDG oe nanoteShnoGohDeP I nanoPoKotP.
```

Текст начинает угадываться, но также становятся видны последствия «слияния» букв, (например: “one oe the” вместо “one of the” – при этом очевидно, слились две *последовательные* буквы алфавита «e» и «f»).

Расшифровываем дальше. Слово nanoteShnoGohDeP похоже на «nanotechnolohies» = “nanotechnologies” (опять слились последовательные буквы «g» и «h»), подставляя S => c, G => l, D => i, P => s, получаем:

```
nanoFechanical ReRices cseation is one oe the Fost LsoFisinh Risections oe the nanotechnolohies. no RonRes that the secent noKel Lsice Ras aRasReR eos ReReloLFent oe the nanoFachines cseateR KT the KottoFIQL aLLsoach. it Rill alloR cseatinh nanoReRises Rith contsollaKle FoReFents at the nanoscale. Rhich coQlR leaR to eQtQse seRolQtion in neR Fatesials cseation anR Risease tseatFent. anR FaT leaR to the holT hsail oe nanotechnolohies I nanosoKots.
```

nanoFechanical = nanomechanical (F => m)

ReRices = devices (R => слившиеся d и v, видим, что также могут сливаться и непоследовательные буквы, причина этого станет ясна позже)

```
nanomechanical dedices cseation is one oe the most Lsomisinh disections oe the nanotechnolohies. no dondes that the secent noKel Lsice das adasded eos dedeloLment oe the nanomachines cseated KT the KottomIQL aLLsoach. it dill allod cseatinh nanodedises dith contsollaKle modements at the nanoscale. dhich coQld lead to eQtQse sedolQtion in ned matesials cseation and disease tseatment. and maT lead to the holT hsail oe nanotechnolohies I nanosoKots.
```

coQld = could (Q => u)

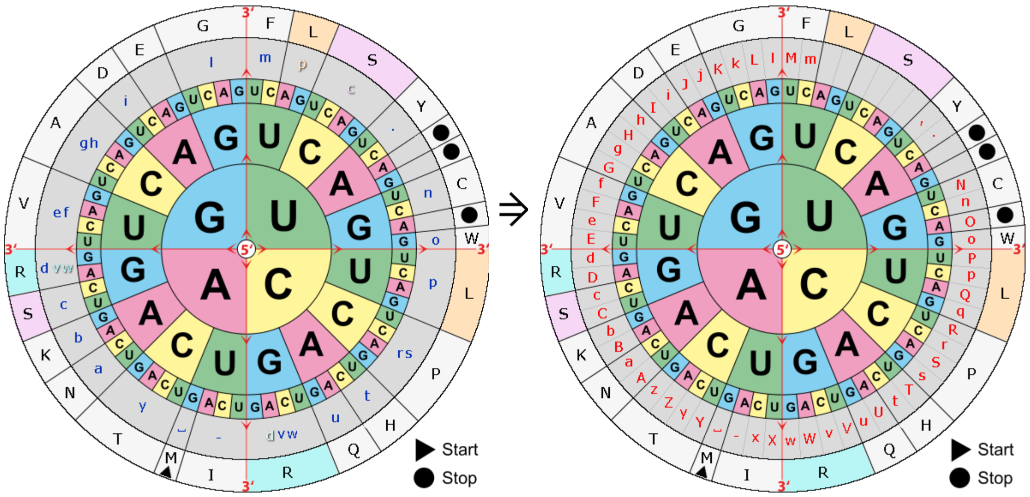
KT the Kottom = by the bottom (K=b, T=y)

aLLsoach, Lsomisinh (L = p, s,r <= P)

```
nanomechanical dedices cseation is one oe the most psomisinh disections oe the nanotechnolohies. no dondes that the secent nobel psice das adasded eos dedelopment oe the nanomachines cseated by the bottom-up appsoach. it dill allod cseatinh nanodedises dith contsollable modements at the nanoscale. dhich could lead to eutuse sedolution in ned matesials cseation and disease tseatment. and may lead to the holy hsail oe nanotechnolohies - nanosobots.
```

das adasded = was awarded (d, w <= R)

Удобно отмечать разгаданные буквы (включая сливающиеся) на карте:



Становится видна система в расположении букв: они почти всегда располагаются по алфавиту по часовой стрелке. Коллизии происходят, когда одну аминокислоту кодируют более 2-х триплетов. Считая, что алфавитный порядок букв по часовой стрелке не нарушается, мы сможем сопоставить триплеты буквам, при этом становятся понятны коллизии не идущих по алфавиту букв (относятся к 3 аминокислотам, S, R, L, которые встречаются более чем в одном непрерывном секторе).

Теперь, зная, какие буквы сливались друг с другом, мы можем (перебирая ограниченное число комбинаций, а также исправив пару опечаток) восстановить полный текст:

```
Nanomechanical devices creation is one of the most promising directions of the nanotechnologies. No wonder that the recent Nobel Prize was awarded for development of the nanomachines created by the bottom-up approach. It will allow creating nanodevices with controllable movements at the nanoscale, which could lead to future revolution in new materials creation and disease treatment, and may lead to the Holy Grail of nanotechnologies - nanorobots.
```

Похожие методы расшифровки описаны в популярной художественной литературе, см. Эдгар Аллан По «Золотой жук» и Артур Конан Дойл «Пляшущие человечки».

3. Если считать, что заглавные и строчные буквы расположены на схеме единообразно (т.е. что первым триплетом по часовой стрелке всегда кодируется либо заглавная, либо строчная буква) – то можно. На помощь нам приходит буква “o”. Поскольку в тексте она везде встречается в середине слов, можно утверждать, что это именно строчная буква. Тогда для соответствующей ей заглавной буквы “O” остается только единственное место – под идущим ранее стоп кодоном (=> первыми по часовой стрелке кодируются заглавные буквы).

4. Нуклеотиды РНК:

   AUU GAU AUG GAU UGC CAC UAC AUG UGA GGG ACC UUC CUC UAC AUG UGG UGC AUG UGU AAC UGC UGG CAC GUC AGC GCG UGC UGG GGG UGG GCC GAC GUC CCG

5. Полипептид:

   IDMDCHYM (поскольку букве “O” соответствует стоп-кодон UGA, то, прочитав его согласно указанному в условии коду, рибосома остановит сборку).