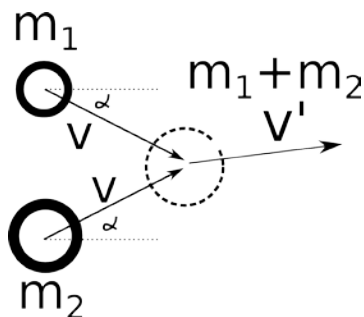


## Физика

### Вариант 1

#### Задача 1.

Для создания наночастиц учёные используют метод лазерной абляции — испарение вещества мишени под действием лазерного импульса, которое затем образует наноклап, а в дальнейшем — наночастицы. В вакуумной камере абсолютно неупруго сталкиваются две наноклапы массами  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ , которые летят со скоростью  $v = 6$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, и образуется новая наноклапа. Найти скорость новой наноклапы (**8 баллов**).



#### Решение:

Вспользуемся законом сохранения импульса. Сначала для горизонтальной составляющей:

$$m_1 v \cos \alpha + m_2 v \cos \alpha = (m_1 + m_2) v_x' \quad (1)$$

$$3mv \cos \alpha = 3mv_x' \quad (2)$$

$$v_x' = v \cos \alpha = v \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2 \text{ балла}) \quad (3)$$

Теперь для вертикальной:

$$m_2 v \sin \alpha - m_1 v \sin \alpha = (m_2 - m_1) v_y' \quad (4)$$

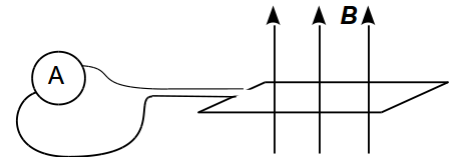
$$mv \sin \alpha = 3mv_y' \quad (5)$$

$$v_y' = v \frac{\sin \alpha}{3} = \frac{v}{6} \quad (3 \text{ балла}) \quad (6)$$

$$v' = v \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{4}} = 2\sqrt{7} = 5.3 \text{ м/с} \quad (3 \text{ балла}) \quad (7)$$

### Задача 2.

Для того, чтобы определить состояние магнитного домена жесткого диска, было решено использовать индукционный флюксометр (прибор для измерения магнитного потока). Флюксометр представляет собой прямоугольную медную рамку, подключенную к баллистическому гальванометру. Размеры рамки: 500 нм на 1 мкм. Определите величину индукции магнитного поля  $B$ , которое создавала доменная область, если в результате процесса стирания информации через гальванометр протек заряд  $q = 0.1$  нКл. Электрическое сопротивление проволоки  $R = 2$  мОм. (8 баллов)



### Решение:

По закону электромагнитной индукции:  $\varepsilon = \frac{-\partial\Phi}{\partial t}$ , и по закону Ома  $I = \frac{\varepsilon}{R}$ .

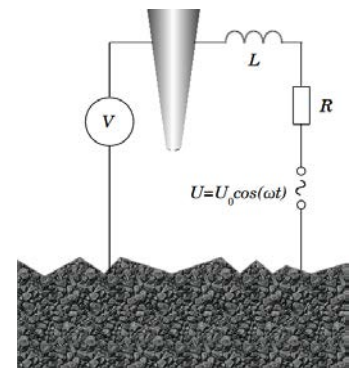
Поток:  $\Phi = BS$ .

Заряд:  $q = \frac{-\Delta\Phi}{R}$

Окончательно выразим индукцию:  $B = \frac{qR}{S} = \frac{0,1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}}{10^{-6} \text{ м} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}} = 0,4 \text{ Тл}$

### Задача 3.

С помощью ёмкостного зонда определяют профиль поверхности, имеющей нанометровые шероховатости. В цепь последовательно включены индуктивность, резистор, источник переменного напряжения, а роль обкладок конденсатора выполняют сам зонд и исследуемая поверхность. Индуктивность равна  $L = 0.01$  Гн. Независимым методом определяют значение ёмкости, которое оказалось равным  $C = 10^{-10}$  Ф. При каком значении сопротивления резонанс в контуре исчезнет? (8 баллов).



### Решение:

Максимум в амплитудно-частотной характеристике невозможно будет наблюдать при:

$$\omega_0 = \beta.$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}.$$

Еще можно получить оценку значения из определения добротности.

$$\text{Для предельного случая } Q = 1. \quad Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 1$$

$$R = \frac{2L}{\sqrt{LC}} = \frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{C}} = 2\sqrt{10^8} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом}$$

#### Задача 4.

Известно, что тонкие пленки выглядят окрашенными в различные цвета радуги при освещении их белым светом. При какой минимальной толщине пленки субоксида кремния (показатель преломления – 2,5), нанесенной на кремниевую подложку (показатель преломления – 3,6), она приобретет определенный цвет? (4 балла). Как изменится минимальная толщина, необходимая, чтобы пленка стала окрашенной, если вместо кремниевой будет использована кварцевая подложка (показатель преломления кварца – 1,5)? Ответ пояснить. (4 балла). Нижнюю границу видимого света считать равной 380 нм.

#### Решение:

Наличие цвета у пленки объясняется эффектом интерференции для лучей, отраженных от верхней и нижней границ пленки. Однако, ошибочным будет полагать, что цвет может возникать только в результате взаимного усиления этих лучей (максимум интерференции). В действительности наличие минимума интерференции также приведет к появлению цвета у пленки, однако, этот цвет будет дополнительным к тому, который соответствует длине волны минимума интерференции (последний будет как бы вычитаться из спектра белого света). Так, в случае с нижней границей видимого света (380 нм – фиолетовый свет) цвет пленки, толщина которой удовлетворяет условию минимума интерференции для отраженных лучей, будет дополнительным к фиолетовому, т.е. желтым. Таким образом, для нахождения *минимальной* толщины  $d_{min}$  окрашенной пленки субоксида кремния на кремниевой подложке будем использовать условие первого *минимума* интерференции (предполагаем нормальное падение лучей на пленку):

$$\Delta = 2d_{min}n = \frac{\lambda}{2}, \quad d_{min} = \frac{\lambda}{4n} = 38 \text{ нм.}$$

Здесь учтено, что дополнительный набег фазы  $\pi$  при отражении от оптически более плотной среды встречается дважды (для луча, отраженного как от верхней, так и от нижней границ тонкой пленки) и, в конечном счете, компенсируется. В то же время, использование условия первого максимума интерференции дало бы результат вдвое больший.

Если теперь в качестве подложки использовать кварц, то ситуация с цветом пленки минимальной толщины изменится, т.к. в оптическую разность хода лучей  $\Delta$  надо будет внести поправку  $\pm \frac{\lambda}{2}$ , связанную с потерей полуволны для луча, отраженного от верхней границы пленки (отражение от оптически более плотной среды). В этом случае минимальной толщине будет соответствовать уже условие первого максимума интерференции. При этом цвет пленки будет фиолетовым, однако минимальная толщина останется той же самой (использование условия первого минимума интерференции дало бы результат вдвое больший):

$$\Delta = 2d_{min}n \pm \frac{\lambda}{2} = \lambda, \quad d_{min} = \frac{\lambda}{4n} = 38 \text{ нм.}$$

Таким образом, ответ на второй вопрос – минимальная толщина окрашенной (в произвольный цвет) пленки не изменится.

### Задача 5.

Современные высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) – это высокотехнологичный материал, представляющий из себя многослойную структуру с толщинами отдельных слоев от нескольких нанометров до сотен микрометров. Важным для практического применения параметром такого сверхпроводника является критический ток, т.е. предельное значение незатухающего постоянного тока, при превышении которого происходит разрушение сверхпроводящего состояния и появление у материала сопротивления.

Какова должна быть максимальная индукция внешнего однородного магнитного поля, чтобы созданный с помощью него сверхток в замкнутом сверхпроводящем кольце площадью  $100 \text{ см}^2$  и индуктивностью  $1 \text{ мГн}$  не превысил критическое значение равное  $250 \text{ А}$ ? Ответ пояснить. (8 баллов)

#### Решение:

При внесении сверхпроводящего кольца в магнитное поле внешний магнитный поток через кольцо изменяется от 0 до максимальной величины  $B \cdot S$ . Согласно закону электромагнитной индукции при этом должна возникнуть электродвижущая сила равная скорости изменения магнитного потока через кольцо. Однако, если сверхпроводник уже находится в сверхпроводящем состоянии, то возникновение в нем ЭДС при нулевом сопротивлении привело бы к появлению бесконечного тока, что невозможно. Следовательно, в сверхпроводнике будет возникать (незатухающий) ток, который будет обеспечивать собственный нарастающий магнитный поток, компенсирующий изменение потока магнитной индукции внешнего поля. Таким образом, сверхток достигнет своего максимального значения, определяемого из условия постоянства полного магнитного потока через сверхпроводящий контур:

$$B_{\max} S = LI_{\max}, \text{ откуда } B_{\max} = \frac{LI_{\max}}{S} = 25 \text{ Тл.}$$

Если сверхпроводник при внесении во внешнее магнитное поле не находился в сверхпроводящем состоянии (не был достаточно охлажден), то *незатухающий* ток в нем не появится. Однако, если после этого сверхпроводник охладить до нужной температуры и выключить внешнее магнитное поле, то в этом случае сверхток возникнет, но по направлению будет противоположным вышеописанному (т.к. внешний магнитный поток будет не нарастать, а уменьшаться).

### Задача 6. Наносенсор.

Российские учёные разработали сверхчувствительный наносенсор на  $\text{NO}_2$ , который срабатывает при адсорбции на его поверхности одной молекулы  $\text{NO}_2$ . Чувствительный элемент расположили на внутренней поверхности герметичной камеры, содержащей  $\text{NO}_2$ . Молекулы  $\text{NO}_2$  перемещаются внутри камеры и не сталкиваются друг с другом. При этом, столкновение молекулы со стенками камеры приводит к её «прилипанию» к стенке на время  $\tau = 2 \text{ мс}$  при комнатной температуре ( $27^\circ\text{C}$ ). После этого молекула снова летит в произвольном направлении. Среднее время пролёта молекулы от стенки до стенки равно  $\tau = 4 \text{ мс}$ . Известно, что сенсор срабатывает в среднем за время  $t_c = 1 \text{ мин}$ . За какое время  $t_n$  сработает сенсор, если камеру нагреть на  $300^\circ\text{C}$  (20 баллов)? Время прилипания

экспоненциально зависит от температуры  $T$ :  $\tau = \tau_0 \exp(-E_a/kT)$ , где  $E_a$  — энергия адсорбции, равная 26 мэВ,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

**Решение:**

В условии задачи была допущена опечатка: более правильная зависимость -  $\tau = \tau_0 \exp(+E_a/kT)$ , зависимость с минусом — нефизична. Поэтому правильными считались оба решения: и для тех, кто пошёл формальным путём и использовал данное выражение, и для тех, кто интуитивно использовал выражение с плюсом. Полное время пролёта и прилипания равно  $\tau_1 \approx 6$  мс. Время срабатывания обратно пропорционально числу столкновений и прямо пропорционально времени между столкновениями, т. е.  $t \sim \tau$ .

Теперь посмотрим как изменятся  $\tau_1$  и  $\tau_2$  после нагрева.  $kT_c$  при комнатной температуре  $T_c$  равно как раз 26 мэВ ( $1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 / 1.6 \cdot 10^{-19}$ ), следовательно при  $T_h = 600$  К (те, кто принял  $T_h = 573$  К, получил на 1 балл меньше),  $kT_h = 52$  мэВ (**3 балла** за корректный перевод энергий в общие единицы измерений). Отсюда отношение времён:

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1} = \frac{\exp(\pm E_a/kT_h)}{\exp(\pm E_a/kT_c)} = e^{\pm E_a/kT_h \mp E_a/kT_c} \quad (8)$$

$\tau_1'/\tau_1 = \exp(\pm 0.5)$  (**3 балла** за формулу).  $\tau_1' = 1.21$  мс для плюса и 3.29 мс для минуса. (**2 балла** за правильное значение).

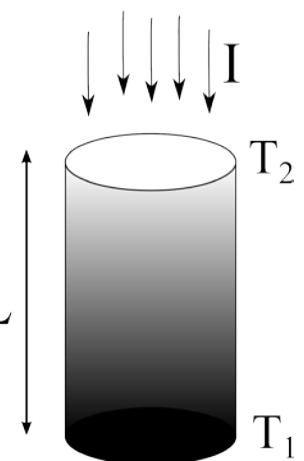
Время  $t_2$  зависит от скорости, квадрат которой пропорционален температуре, поэтому  $\tau_2/\tau_2' = (T_h/T_c)^{0.5}$ , (**4 балла**)  $\tau_2' = \tau_2/\sqrt{2} = 2.82$  мс (**2 балла**). Отсюда  $\tau_2 = 4$  мс в первом варианте и  $\tau_2 = 6.12$  мс во втором. Осталось составить пропорцию:  $t/\tau_2 = t'/\tau_2'$  (**4 балла**):

$$t_h = t_c \frac{\tau_1 \exp(\pm E_a/kT_h \mp E_a/kT_c) + \tau_2 \sqrt{T_c/T_h}}{\tau_1 + \tau_2} \quad (9)$$

Ответ: сенсор сработает за 40 секунд в первом варианте и за 1.02 минуты (**2 балла**).

### Задача 7. Термоэлектрические нанонити

Учёные из МГУ разработали новый термоэлектрический элемент (т.е. преобразователь тепловой энергии в электрическую) на основе кремниевых нанонитей длиной  $L = 200$  мкм. Юная изобретательница София решила использовать это устройство как фотоземель и поставила его под прямые солнечные лучи с интенсивностью  $I = 1300$  Вт/м<sup>2</sup>. При этом всё солнечное излучение поглощалось в тонком слое на верхней поверхности нанонити, а нижняя поверхность имела постоянную температуру  $T_1 = 300$  К. Найдите температуру верхней поверхности нанонити (**13 баллов**). Оцените максимальный КПД такого солнечного элемента, считая, что солнечный свет поглощается полностью (**7 баллов**). Теплопроводность кремниевой нанонити Теплопередачей с боковых стенок нанонити в окружающую среду пренебречь.



**Решение:**

Вспользуемся уравнением теплопроводности, к которому талантливые школьники должны прийти путём нетривиальных логических рассуждений:

$$I = \kappa \frac{\Delta T}{L} = \kappa \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (10)$$

Отсюда найдём  $T_2$ :

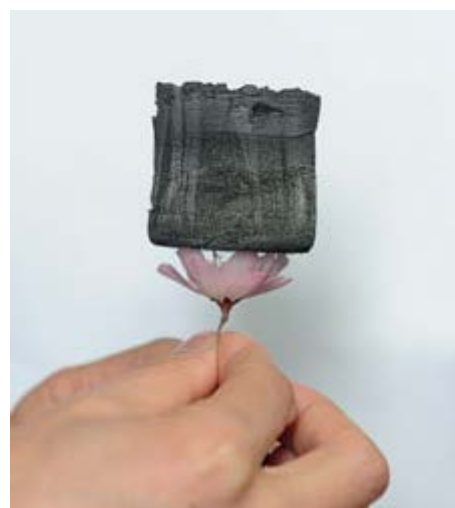
$$T_2 = T_1 + \frac{IL}{\kappa} = 300 + \frac{1300 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{1.3 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ К} \quad (11)$$

Максимальный КПД элемента будет определяться КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} = \frac{200}{500} = 40\% . \quad (12)$$

**Задача 8. Графеновый аэрогель**

В стремлении создать самый легкий и вместе с тем твердый материал ученые из Китая изобрели недавно графеновый аэрогель – пористое вещество на основе монослойного углерода, имеющее плотность всего  $0,16 \text{ мг/см}^3$  (для сравнения плотность воздуха –  $1,225 \text{ мг/см}^3$ ). Может показаться, что столь легкое вещество должно свободно парить в воздухе, однако этого не происходит, пока поры аэрогеля заполнены этим же самым воздухом. Какой минимальный процент пор необходимо заполнить гелием (плотность  $0,179 \text{ мг/см}^3$ ) взамен воздуха, чтобы графеновый аэрогель приобрел способность свободно взлетать, если известно, что в обычном состоянии он на 90 % состоит из воздуха? (**10 баллов**). С какой установившейся скоростью будет подниматься кубик аэрогеля объемом  $1 \text{ см}^3$ , поры которого полностью заполнены гелием, если на него действует сила сопротивления пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности  $k = 9 \cdot 10^{-4} \text{ (Н}\cdot\text{с)/м}$ ? (**10 баллов**).

**Решение:**

Принципиальным моментом задачи является понятие плотности для пористого вещества. Поскольку известно, что графеновый аэрогель не взлетает, если его поры заполнены воздухом, то очевидно, что заявленное значение плотности  $\rho_{\text{аэрогель}} = 0,16 \text{ мг/см}^3$  дано только для самого графенового "каркаса" без учета содержащегося в порах воздуха. Т.е  $1 \text{ см}^3$  аэрогеля в вакууме весит  $0,16 \text{ мг}$ . Рассчитаем для начала плотность аэрогеля с воздухом в предположении, что воздух занимает 90% по объёму:

$$\rho_{\text{аэрогель+воздух}} = \rho_{\text{аэрогель}} + 0,9 \cdot \rho_{\text{воздух}} = 1,2625 \text{ мг/см}^3 > \rho_{\text{воздух}}$$

т.е. аэрогель с воздухом действительно тяжелее самого воздуха и не может летать (если же предположить, что воздух занимает 90% не по объёму, а по массе, то масса воздуха, содержащегося в 1 см<sup>3</sup> аэрогеля будет равна:  $0,16 \cdot 9 = 1,44$  мг, что превышает массу 1 см<sup>3</sup> чистого воздуха).

Теперь представим, что  $k$ -я часть пор аэрогеля объемом 1 см<sup>3</sup>, а именно  $(0,9 \cdot k)$  см<sup>3</sup> заполнена гелием, тогда оставшаяся часть –  $(0,9 \cdot (1 - k))$  см<sup>3</sup> – останется заполнена воздухом. Для того, чтобы такой аэрогель смог взлететь, его "эффективная" плотность должна равняться плотности воздуха. Имеем:

$$\rho_{\text{аэрогель+воздух+гелий}} = \rho_{\text{аэрогель}} + 0,9 \cdot k \cdot \rho_{\text{гелий}} + 0,9 \cdot (1 - k) \cdot \rho_{\text{воздух}} = \rho_{\text{воздух}}$$

$$0,16 + 0,9 \cdot k \cdot 0,179 + 0,9 \cdot (1 - k) \cdot 1,225 = 1,225 \text{ (мг/см}^3\text{)}$$

$$\rightarrow k \approx 0,0398 \text{ или } \approx 4 \%$$

Для ответа на второй вопрос рассчитаем эффективную плотность аэрогеля, все поры которого заполнены гелием:

$$\rho_{\text{аэрогель+гелий}} = \rho_{\text{аэрогель}} + 0,9 \cdot \rho_{\text{гелий}} = 0,3211 \text{ мг/см}^3 = 0,3211 \text{ кг/м}^3$$

Установившийся подъем кубика аэрогеля объемом  $V = 1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$  наступит, когда сила Архимеда компенсируется силой сопротивления и силой тяжести. Тогда для скорости имеем:

$$v = \frac{(\rho_{\text{воздух}} - \rho_{\text{аэрогель+гелий}})gV}{k} \approx 0,98 \text{ см/с.}$$