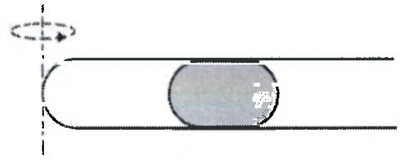
11 класс

Задача 1.

В горизонтально расположенной тонкой стеклянной трубке длиной L находится капля ртути массой m. Один из концов трубки герметично запаивают и плавно раскручивают систему вокруг этого конца до угловой скорости ω. Ось вращения вертикальна (см. рис.). Найти, в каком месте трубки расположится капля ртути, если первоначально она находилась на расстоянии x от закрытого конца. Атмосферное давление p_0, внутренний радиус трубки R. Считать, что размеры капли много меньше x, трением пренебречь.



Решение:

Обозначим y – расстояние от капли до закрытого конца трубки после установления равновесия. Центростремительное ускорение обеспечивается разностью давлений на каплю изнутри и снаружи:

$$m\omega^2 y = (p_A - p)\pi R^2 .$$

Давление внутри трубки легко найти с помощью закона Бойля-Мариотта: $p_A x = py$ (сечение трубки полагаем одинаковым по всей длине). Из этих уравнений найдем y:

$$y_{1.2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha},$$ где $$\alpha = \frac{m\omega^2}{p_A \pi R^2}.$$ Оба решения положительны, однако справедлив только один — только одно положение капли будет устойчивым. Рассмотрим функцию $F(y) = m\omega^2 y - (p_A - p)\pi R^2$. Если она положительна, то равнодействующая сил перемещает каплю наружу, в противном случае - внутрь. Т.к. $y>0$, функция $F(y)$ имеет тот же знак, что и функция $y \cdot F(y)$. Последняя же – парабола с осями, направленными вверх. Итак, если мы чуть увеличим $y_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha}$ функция $F(y)$ станет положительна, и капля станет двигаться наружу. Следовательно, это положение неустойчиво, а устойчивым является другой корень $y_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha}$. Кроме того, полученный ответ имеет смысл, только если $y_1 < L$, иначе капля выскочит из трубки.

Ответ: $y = \dfrac{1 - \sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha}$, $\alpha = \dfrac{m\omega^2}{p_A \pi R^2}$

Этап решения	Балл
Верное выражение для связи центростремительного ускорения и разности давлений	2
Верная запись давления в трубке из закона Бойля-Мариотта	2
Верное решение уравнения для положений капли	3
Верная идея о выборе решения, при котором капля перемещается внутрь	3
Максимальный балл за правильный и обоснованный ответ	**10**

Задача 2.

Определить количество меди, необходимое для устройства двухпроводной линии длиной 5 км. Напряжение на шинах станции 2,4 кВ. Передаваемая потребителю мощность 60 кВт. Допустимая потеря напряжения на линии 8%. Плотность меди 8900 кг/м^3, удельное сопротивление $0{,}017\cdot10^{-4}$ Ом·см.

Решение:

Падение напряжения на проводах линии равно:

$$U_{пр} = 0{,}08U = I\rho\frac{2l}{S} \qquad (1).$$

Напряжение на шинах электростанции: $U = I\left(R + R_{пр}\right)$. Мощность, выделяемая на полезной нагрузке R потребителя:

$$N = \frac{U^2}{\left(R + R_{пр}\right)^2}\cdot R = \frac{U^2{}_{потр}}{R} = \frac{\left(0{,}92U\right)^2}{R}$$, т.е. величина нагрузки

$$R = \frac{\left(0{,}92U\right)^2}{N} = 81{,}25 \text{ Ом}.$$

Тогда сила тока равна:

$$I = \frac{U}{\dfrac{\left(0{,}92U\right)^2}{N} + R_{пр}}.$$

Уравнение (1) представим в виде:

$$0{,}08U = \frac{U\cdot R_{пр}}{\dfrac{\left(0{,}92U\right)^2}{N} + R_{пр}}. \qquad (2)$$

Решая (2), находим сопротивление проводов линии:

$$R_{np} = \frac{0{,}92 \cdot 0{,}08 \cdot U^2}{N} = 7 \text{ Ом.}$$

Найдем сечение проводов: $R_{np} = \rho \frac{2l}{S} \Rightarrow S = \rho \frac{2l}{R_{np}}$.

Тогда масса медных проводов будет: $m = \rho_{Cu} 2lS = \rho_{Cu} 2l\rho \frac{2l}{R_{np}} = \rho_{Cu}\rho \frac{4l^2}{R_{np}} =$ 2143 кг.

Ответ: m=2143 кг.

Примерные критерии оценивания

Этап решения	Балл
Верное выражение для допустимого падения напряжения на проводах линии	1
Верное выражение для сопротивления полезной нагрузки, исходя из мощности	2
Верное выражение для силы тока	2
Верное выражение и численное значение сопротивления проводов	2
Верное выражение для массы материала проводов	2
Правильный численный расчет	1
Максимальный балл за правильный и обоснованный ответ	**10**

Задача 3.

Из шланга лежащего на земле бьёт под углом 45° к горизонту вода с начальной скоростью 10 м/с. Площадь сечения отверстия шланга 5 см^2. Определить массу струи, находящейся в воздухе.

Решение:

При решении задачи примем ряд упрощений: пренебрежем сопротивлением воздуха, а также будем считать, что сечение струи в полете не меняется (в реальности этого добиться практически невозможно, т.к. выходящая из шланга вода представляет собой расходящийся поток). Разобьём струю воды на очень малые отрезки, струя при этом остается сплошной. Будем считать, что этот отрезок струи воды движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Рассчитаем время движения отрезка до падения. Вытекшая из шланга за это время масса воды представляет собой искомую величину. Запишем уравнения движения отрезка:

$x = V_0 \cos\alpha \cdot t$ (1) - уравнение движения тела вдоль оси X (вдоль этой оси на тело не действует никаких сил, поэтому вдоль нее тело движется равномерно).

$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ (2) - уравнение движения тела вдоль оси Y (вдоль этой оси на тело действует сила тяжести, поэтому тело движется с ускорением g, направленным вертикально вниз).

Из этих уравнений можно узнать, сколько времени отрезок находится в полете. Из уравнения (2) найдем время полета $t_п$ (из условия, что в конце полета перемещение капли вдоль оси Y равно нулю):

$$0 = V_0 \sin\alpha \cdot t_n - \frac{g{t_n}^2}{2}, \text{ отсюда}$$

$$t_n = \frac{2V_0}{g}\sin\alpha = 1{,}41 \text{ с}$$

Итак, $t_п$ - это время полета малого отрезка от момента выхода из шланга до момента падения на землю. Но тогда все отрезки (капли), вылетевшие из шланга за промежуток времени $\Delta t < t_п$ от произвольно выбранного момента начала наблюдения находятся в воздухе. Отсюда следует, что масса струи, находящейся в воздухе равна массе всех капель, вылетающих за промежуток времени $\Delta t = t_п$. Масса воды, выходящая за промежуток $t_п$:

$$m = V_0 S t_n \rho = 7{,}1 \text{ кг}$$

Ответ: m=7,1 кг.

Примерные критерии оценивания

Этап решения	Балл
Идея о рассмотрении полета отдельного отрезка струи или капли	2
Правильное определение времени полета отрезка как тела, брошенного под углом к горизонту	4
Верное выражение для массы воды, находящейся в воздухе	3
Правильный численный расчет	1
Максимальный балл за правильный и обоснованный ответ	**10**

Задача 4.

Неоновая лампочка включена в сеть. Лампочка зажигается и гаснет при напряжении на её электродах в n=1,4 раз меньшем, чем амплитудное значение напряжения в сети. Определите, во сколько раз продолжительность одной вспышки лампочки больше промежутка между вспышками.

Решение:

Обозначим длительность вспышки лампы через τ, а промежутка между вспышками через Δt. В течение периода колебаний напряжения T лампа включится дважды (в положительную и отрицательную полуволну) $T=2(\tau+\Delta t)$. Т.е. искомое соотношение $\frac{\tau}{\Delta t}=\frac{\tau}{T/2-\tau}$. Напряжение на лампе в сети переменного тока меняется по синусоидальному закону $U=U_0\sin\omega t$.По условию лампа включается при напряжении $\frac{U_0}{n}$. Времена включения и выключения лампы в течение первого (положительного) полупериода определяются как: $t_1=\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$, $t_2=\frac{1}{\omega}\left(\pi-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Длительность вспышки $\tau=t_2-t_1=\frac{1}{\omega}\left(\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Период колебаний напряжения $T=\frac{2\pi}{\omega}$, отсюда $\frac{\tau}{\Delta t}=\frac{\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}{2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}\approx 1{,}03$.

Ответ: $\frac{\tau}{\Delta t}=\frac{\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}{2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}\approx 1{,}03$.

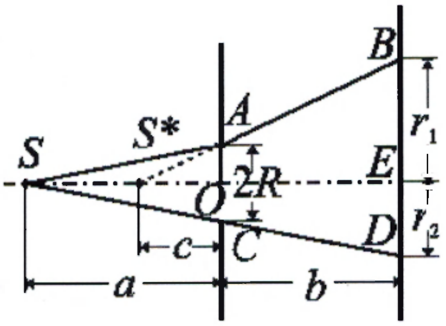
Примерные критерии оценивания

Этап решения	Балл
Верная идея об определении длительности вспышек и промежутка между ними (рисунок или описание)	2
Правильное определение моментов времени включения и выключения лампы	3
Правильное выражение для соотношения длительностей промежутка и вспышки	4
Правильный численный расчет	1
Максимальный балл за правильный и обоснованный ответ	**10**

Задача 5.

В отверстие в тонкой непрозрачной перегородке плотно вставлена тонкая рассеивающая линза радиуса R=1 см. Если перед линзой на ее главной оптической оси поместить точечный источник света, то на экране, находящемся по другую сторону от линзы на расстоянии b=20 см, появится светлое пятно радиуса r_1=4 см. Если же, не трогая экрана и источника, убрать линзу, то радиус пятна уменьшится до r_2=2 см. Найти фокусное расстояние линзы.

Решение:



На рисунке точками S и S^* показаны источник света и его мнимое изображение в рассеивающей линзе. На этом же рисунке на верхней его половине показан ход луча, проходящего через верхний край (точка А) рассеивающей линзы от источника S, а на нижней - прямой SC изображен луч, проходящий через нижний край отверстия в отсутствии линзы. Из подобия треугольников S*AO и S*BE следует, что отношение расстояния c от изображения S* до линзы к расстоянию $c+b$ от точки S* до экрана должно быть равно отношению радиуса линзы R к радиусу светлого пятна r_1. Поскольку треугольник SOC подобен треугольнику SED , то отношение радиуса пятна r_2 к радиусу отверстия R должно быть равно $1+(b/a)$, где a - расстояние от источника S до линзы. Вместе с тем, из формулы для тонкой линзы следует, что расстояния a, c и фокусное расстояние f должны удовлетворять соотношению $\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{1}{f}$. Следовательно, искомое фокусное расстояние f линзы:

$$f=\frac{bR}{r_2-r_1}$$ =-0,1 м (знак минус означает, что линза рассеивающая).

Ответ: f=0,1 м

Примерные критерии оценивания

Этап решения	Балл
Верное представление о расположении источника, мнимого изображения линзе и пятен на экране (рисунок или описание)	2
Правильное определение расстояний от отверстия до источников и экрана из геометрических соображений	4

Правильная запись уравнения тонкой линзы	3
Правильный численный расчет	1
Максимальный балл за правильный и обоснованный ответ	**10**

Заместитель председателя оргкомитета
открытой олимпиады Северо-Кавказского
федерального университета «45 параллель»,
проректор по учебной работе СКФУ ____________________ **В.И. Шипулин**