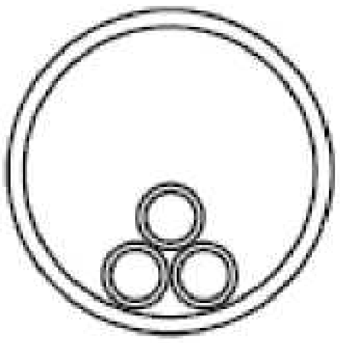
Олимпиада «Физика управляет миром» 2015-2016 уч. год.

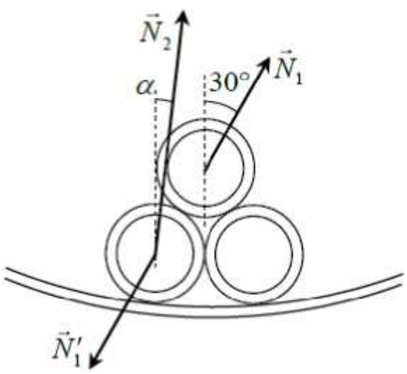
Теоретический тур

10 класс
(решения)

Задача 1.

Три одинаковые гладкие трубы с радиусом r находятся в равновесии внутри массивной трубы радиуса R , при этом малые трубы расположены так, как показано на рисунке. При каком минимальном значении R равновесие труб будет нарушено. Трение между всеми поверхностями отсутствует.





На верхнюю трубу действуют: сила тяжести и силы со стороны двух нижних труб (на рисунке показана только одна из этих сил – N_1). Поскольку треугольник, вершинами которого являются центры малых труб, равносторонний, угол между силами, действующими на верхнюю трубу со стороны нижних, и вертикалью равен 30°. Поэтому из условия равновесия верхней малой трубы заключаем

$$N_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

где m - масса верхней трубы. На нижнюю трубу действует сила тяжести (mg), сила со стороны верхней (N_1) и со стороны большой трубы (N_2), причем сила N_2 направлена в центр большой трубы. Поскольку две нижних трубы касаются между собой, то для угла между силой N_2 и вертикалью имеем очевидное соотношение

$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r}$$

Из вертикальной проекции условия равновесия нижней трубы имеем

$$mg + N_1\cos 30^\circ = N_2\cos\alpha$$

Таким образом, получим:

$$N_2 = \frac{3mg}{2\cos\alpha} = \frac{3mg(R-r)}{2\sqrt{(R-r)^2 - r^2}}$$

Трубы начнут разъезжаться в том случае, когда горизонтальная проекция $\vec{N}_1$ будет преобладать над аналогичной составляющей силы $\vec{N}_2$, т.е. $N_1 \sin 30^o \geq N_2 \sin\alpha$. Последнее выражение позволяет определить, что

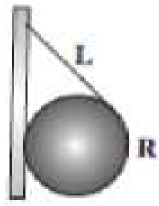
$$\frac{mg}{2\sqrt{3}} \geq \frac{3mg(R-r)\sin\alpha}{2\sqrt{(R-r)^2 - r^2}} = \frac{3mgr}{2\sqrt{(R-r)^2 - r^2}}$$

Решение этого неравенства имеет вид:

$$R \geq (1 + 2\sqrt{7})r$$

Задача 2.

Тяжёлый цилиндр радиусом R=3см подвешен за прикреплённую к нему нить к вертикальной стене. Минимальный коэффициент трения о стену, при котором цилиндр не скользит по ней, равен μ=25/24. Определите длину нити L



Если обозначить угол между нитью и стеной как a, то

$$\begin{cases} T\sin\alpha = N \\ F_{тр}R \geq TR \end{cases}$$,поэтому $\mu T \sin\alpha \geq T, \quad \mu \geq \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Что бы найти sinα учтем, что $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R}{\sqrt{L^2 + R^2}}; \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}}$. Тогда

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2RL}{L^2 + R^2};$$

Окончательно $\mu \geq \dfrac{L^2 + R^2}{2RL}$, тогда $\dfrac{25}{24} = \dfrac{L^2 + R^2}{2RL}$

Решение квадратного уравнения дает $L = \dfrac{25 \pm 7}{24}R = \dfrac{25 \pm 7}{24} \cdot 3$, т.е. L_1=4 см, L_2=2,25 см

Ответ: L = 4 СМ

Задача 3.

Две концентрические металлические сферы радиусами R и 3R заряжены зарядами Q и -4Q соответственно. Затем малую сферу заземляют с помощью проводника ничтожно малой емкости через малое отверстие в большой сфере. Какой заряд протечет по проводнику в направлении от малой сферы к земле.

Решение. После заземления потенциал малой сферы станет равным нулю. Поэтому для нового заряда малой сферы q справедливо условие

$$\frac{kq}{R} - \frac{4kq}{3R} = 0$$

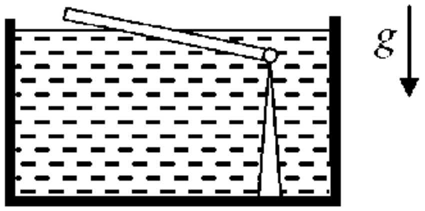
где k - постоянная закона Кулона. Отсюда

$$q = \frac{4Q}{3}$$

и, следовательно, от малой сферы к земле протечет заряд

$$\Delta q = Q - q = -\frac{Q}{3}.$$

Задача 4.



Тонкая палочка шарнирно прикреплена к вертикальной стойке в бассейне с водой, так что уровень воды немного выше шарнира. При этом палочка погружена в воду на 3/5 длины. На какую часть длины будет погружена палочка, если слить часть воды, так что уровень воды станет немного ниже шарнира?

Пусть ρ_o — плотность воды, ρ — плотность палочки, S — площадь её поперечного сечения, а l — её длина. Равенство моментов сил относительно шарнира в случае, когда уровень воды выше шарнира и палочка погружена на x = 3/5 длины, имеет вид:

$$\rho S\,\mathrm{lg}\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha = \rho_0 Sx\,\mathrm{lg}\cdot\frac{xl}{2}\cos\alpha$$

где α — угол наклона палочки к горизонту. Сокращая одинаковые множители, получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = x^2 \qquad (1)$$

В случае, когда уровень воды станет ниже шарнира, равенство моментов сил относительно шарнира примет вид:

$$\rho lSg\cdot\frac{1}{2}\cos\beta = \rho_0 lSyg\cdot l\left(1-\frac{y}{2}\right)\cos\beta$$

где β — угол наклона палочки к горизонту, y — искомая погруженная часть палочки, Сокращая одинаковые множители, получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = y(2-y)\ (2)$$

Приравняв правые части (1) и (2), получим квадратное уравнение

$y^2 - 2y + x^2 = 0$,

которое имеет два действительных корня

$$y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$

Исключив один из корней, не удовлетворяющий условию $y < 1$, и подставив $x = 3/5$, получим ответ

$$y = 1 \pm \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{5}$$

Задача 5.

Идеальный газ совершает следующий циклический процесс: первоначально газ имеет температуру, давление и объем, равные соответственно T_0, p_0, V_0; затем газ нагревают при постоянном объеме пока его давление не станет равным αp_0, где $\alpha>1$; далее газ расширяется адиабатические (при количестве теплоты Q, равном нулю) пока его давление не станет вновь равным p_0; после чего газ охлаждается при постоянном давлении до первоначального состояния. Показатель адиабаты определяется как отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме $\gamma = c_p / c_v$. Определите КПД цикла (отношение полезной работы газа к полученному количеству теплоты), выразив его через α и γ. При адиабатическом процессе описанного цикла были проведены измерения давления и температуры газа, результаты которых представлены в таблице.

Давление	$1{,}21p_0$	$1{,}41p_0$	$1{,}59p_0$	$1{,}73p_0$	$2{,}14p_0$
Температура	$2{,}11T_0$	$2{,}21T_0$	$2{,}28T_0$	$2{,}34T_0$	$2{,}49T_0$

Предложите способ определения показателя адиабаты на основе представленных данных и найдите его значение.

Решение

Обозначим начальные точки процессов цикла соответственно 0, 1, 2. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что $T_1=\alpha T_0$. Для адиабатического процесса запишем:

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$$
$$\alpha p_0V_1^\gamma = p_0V_2^\gamma$$

откуда

$$V_2 = V_1\alpha^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $T_2 = T_0\alpha^{\frac{1}{\gamma}}$. Газ получает тепло при изохорном процессе:

$$Q_1 = \nu c_v\Delta T = \nu c_v\left(\alpha-1\right)T_0,$$

и отдает тепло в изобарном процессе:

$$Q_2 = \nu c_p\Delta T = \nu c_p\left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}}-1\right)T_0.$$

Совершенная газом работа равна разности этих двух величин. Тогда можно определить КПД:

$$\eta = \frac{c_v\left(\alpha-1\right)-c_p\left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}}-1\right)}{c_v\left(\alpha-1\right)}.$$

Отсюда легко получить

$$\eta = 1-\gamma\frac{\alpha^{1/\gamma}-1}{\alpha-1}.$$

Для определения показателя адиабаты можно применить графический метод. Для адиабатического процесса имеем:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = const.$$

Отсюда следует, что, если построить график процесса в логарифмических осях (log$P$ от log$T$), то это будет линейная зависимость, угловой коэффициент которой будет равен $\gamma/(\gamma-1)$. Используя табличные данные, можно получить $\gamma=7/5$.