9 класс

Задача 1.

Тело движется вдоль оси x. График зависимости его скорости v от координаты x приведен на рисунке 1. Найти ускорение тела в точке с координатой $x = 3$ м. Найти также максимальное ускорение тела на отрезке от 0 до 5 м.

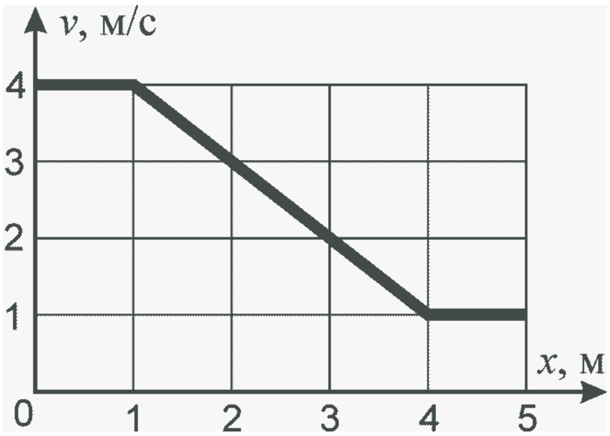

Рис. 1.

Решение. На участке $x_1 = 1$ м $-$ $x_2 = 4$ м скорость меняется по закону:

$$v_x = v_1 - k(x-1),$$

где $k = 1\ \text{с}^{-1}, v_1 = 4$ м/с. Ускорение по определению равно

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Но $\Delta x = v_x \Delta t$. Отсюда $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{v_x}$. Поэтому

$$a_x = v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x}.$$

Но $\dfrac{\Delta v_x}{\Delta x} = -k$. Следовательно, $a_x = -kv_x = -k\big(v_1 - k(x-1)\big) = -kv_1 + k^2 x - k$.

Итак,

$$a_x(x) = -kv_1 + k^2 x - k.$$

Вычисление:

$$a_x(3) = -4 + 3 - 1 = -2\ \left(\text{м}/\text{с}^2\right).$$

Поэтому ускорение в точке $x = 3$ м равно $a = -2$ м/с^2. Так как на отрезках от 0 до 1 м и от 4 до 5 м ускорение равно нулю, а на участке от 1 до 4 м ускорение отрицательно, то максимальное ускорение на участке от 0 до 5 м равно нулю.

Ответ: ускорение в точке $x = 3$ м равно $a = -2$ м/с^2, максимальное ускорение на участке от 0 до 5 м равно нулю.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Получен закон изменения скорости – 3 балла;
2. Получено выражение для ускорения – 5 баллов;
3. Получен численный ответ для ускорения в точке $x = 3$ м – 2 балла;
4. Определено максимальное ускорение тела – 2 балла.

Задача 2

В системе, изображённой на рисунке 2, масса самого правого груза равна m_4 = 1 кг, а массы всех блоков одинаковы и равны m_0 = 300 г. Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов m_1, m_2, m_3. Массой троса и трением в блоках пренебречь.

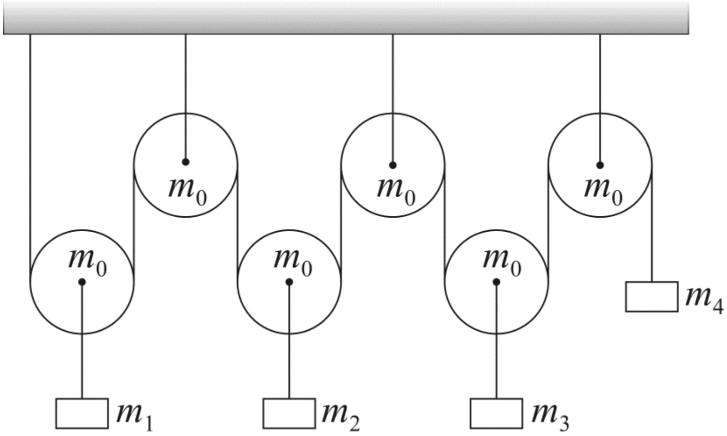

Рис. 2.

<u>Решение</u>. Пронумеруем блоки и запишем уравнения статики для каждого блока:

$$1)\ (m_1+m_0)g=2T,$$

$$2)\ m_0g=F-2T,$$

$$3)\ (m_2+m_0)g=2T,$$

$$4)\ m_0g=F-2T,$$

$$5)\ (m_3+m_0)g=2T,$$

$$6)\ m_0g=F-2T.$$

Для последнего грузика: $m_4g=T$.

Отсюда видно, что $m_1=m_2=m_3=m$. Тогда

$$(m+m_0)g=2m_4g.$$

Отсюда $m=2m_4-m_0$.

<u>Вычисление</u>: $m=2\cdot1-0{,}3=1{,}7$ кг.

Ответ: 1,7 кг.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записаны уравнения статики (условия равновесия) – 3 балла;
2. Показано равенство масс грузов m_1, m_2, m_3 – 3 балла;
3. Получено выражение для массы грузов – 5 баллов;
4. Получен численный ответ – 1 балл.

Задача 3

На горизонтальном шероховатом столе помещены грузы M (внизу) и m (вверху), связанные нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 3). Коэффициенты трения грузов друг о друга и нижнего груза о поверхность стола одинаковы и равны μ. С какой горизонтальной силой F необходимо потянуть нижний груз, чтобы тела пришли в движение? Нити горизонтальны.

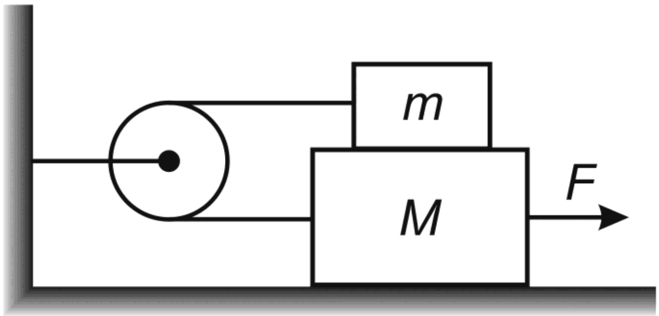

Рис. 3.

<u>Решение</u>. Запишем второй закон Ньютона для верхнего тела:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1}.$$

Запишем его в проекциях на оси x и y:

$$ma_1 = F_{\text{тр}1} - T_1, \quad (1)$$

$$0 = -mg + N_1. \quad (2)$$

Кроме того,

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1. \quad (3)$$

Аналогично, запишем второй закон Ньютона для второго тела:

$$M\vec{a}_2 = M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{F}'_{\text{тр}1} + \vec{P}_1 + \vec{F}.$$

Запишем его в проекциях на оси x и y:

$$Ma_2 = -T_2 - F_{\text{тр}2} - F_{\text{тр}1} + F, \quad (4)$$

$$0 = -Mg + N_2 - P_1. \quad (5)$$

Кроме того,

$$F_{\text{тр}2} = \mu N_2. \quad (6)$$

Из уравнения (2) находим: $N_1 = mg$. Подставляя в формулу (3), получим

$$F_{\text{тр}1} = \mu mg. \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в (1), получим

$$ma_1 = \mu mg - T_1. \quad (8)$$

Кроме того, согласно 3-ему закону Ньютона $P_1 = N_1 = mg$. Поэтому из выражения (5) находим

$$N_2 = Mg + P_1 = Mg + mg = (M + m)g.$$

Из формулы (6)

$$F_{\text{тр}2} = \mu N_2 = \mu(M + m)g. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), найдем

$$Ma_2 = -T_2 - \mu(M + m)g - \mu mg + F,$$

$$Ma_2 = -T_2 - \mu(M + 2m)g + F. \quad (10)$$

Так как $T_1 = T_2$, запишем

$$ma_1 = \mu mg - T, \quad (11)$$

$$Ma_2 = F - T - \mu(M + 2m)g. \quad (12)$$

Кроме того, так как тела связаны одной нитью, то должно выполняться условие $a_2 = -a_1 = a$. Отсюда

$$ma = T - \mu mg, \tag{13}$$

$$Ma = F - T - \mu(M + 2m)g. \tag{14}$$

Складывая (13) и (14), получим

$$(M + m)a = F - \mu(M + 2m)g - \mu mg. \tag{15}$$

Отсюда, чтобы тела начали двигаться, должно выполняться условие $a \ge 0$. Из (15) следует, что для этого сила F должна удовлетворять условию:

$$F \ge \mu(M + 3m)g.$$

Или минимальная сила должна быть равна $F = \mu(M + 3m)g$.

Ответ: $F = \mu(M + 3m)g$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записаны уравнения движения (2-й закон Ньютона) для двух тел – 4 балла;
2. Записан критерий начала движения тел ($a \ge 0$) – 1 балл;
3. Получено выражение для минимальной силы – 7 баллов.

Задача 4.

На дне бассейна, заполненного водой, лежит тело, плотность которого $\rho = 900$ кг/м^3. Найти глубину бассейна, если известно, что тело всплывает в течение 3 секунд. Сопротивлением воды пренебречь. Плотность воды 1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Согласно 2-ому закону Ньютона:

$$ma = F_А - mg.$$

Архимедова сила:

$$F_А = \rho_в gV.$$

Отсюда

$$\rho Va = \rho_в gV - \rho Vg,$$

$$a = \frac{\rho_в - \rho}{\rho} g.$$

Движение равноускоренное. Из формулы

$$s = \frac{at^2}{2},$$

Найдем глубину бассейна

$$H = \frac{\rho_в - \rho}{\rho}\frac{gt^2}{2}.$$

Вычисление:

$$H = \frac{1000 - 900}{900} \cdot \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 5 \text{ (м)}.$$

Глубина бассейна 5 м.
Ответ: 5 м.
(12 баллов)
Примерные критерии оценивания:

1. Записано уравнение движения (2-й закон Ньютона) – 2 балла;
2. Получено выражение для ускорения тела – 5 баллов;
3. Получено выражение для глубины бассейна – 4 балла;
4. Получен численный ответ – 1 балл.

Задача 5.

В стакан при комнатной температуре $t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ налита вода до половины объема. Туда доливают еще столько же воды при температуре $t_2 = 30\ ^\circ\mathrm{C}$. Установившаяся температура стакана и воды оказалась равной $\bar{t}_1 = 23\ ^\circ\mathrm{C}$. В другой такой же стакан наливают воду при той же комнатной температуре до 1/3 объема и доливают горячей водой ($30\ ^\circ\mathrm{C}$) доверху. Какая температура установится в этом стакане? Потерями тепла в окружающее стакан пространство за время установления температуры пренебречь.

Решение. В первом случае уравнение теплового баланса запишется в виде:

$$\left(c\frac{m}{2} + c_1 m_1\right)\left(\bar{t}_1 - t_1\right) = c\frac{m}{2}\left(t_2 - \bar{t}_1\right), \qquad (1)$$

где c_1 и m_1 – теплоемкость и масса стакана, m – масса воды в полном стакане. То есть тепло горячей воды идет на нагревание воды в стакане и самого стакана.

Во втором стакане

$$\left(c\frac{m}{3} + c_1 m_1\right)\left(\bar{t}_2 - t_1\right) = c\frac{2m}{3}\left(t_2 - \bar{t}_2\right). \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) можно записать в виде:

$$c\frac{m}{2} + c_1 m_1 = c\frac{m}{2}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_1\right)}{\left(\bar{t}_1 - t_1\right)},$$

$$c\frac{m}{3} + c_1 m_1 = c\frac{2m}{3}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_2\right)}{\left(\bar{t}_2 - t_1\right)}.$$

Вычитая их, получим

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_1\right)}{\left(\bar{t}_1 - t_1\right)} - \frac{2}{3}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_2\right)}{\left(\bar{t}_2 - t_1\right)},$$

$$\frac{t_2 - \bar{t}_2}{\bar{t}_2 - t_1} = \frac{3}{4}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_1\right)}{\left(\bar{t}_1 - t_1\right)} - \frac{1}{4},$$

$$t_2 - \bar{t}_2 = \bar{t}_2\left[\frac{3}{4}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_1\right)}{\left(\bar{t}_1 - t_1\right)} - \frac{1}{4}\right] - t_1\left[\frac{3}{4}\frac{\left(t_2 - \bar{t}_1\right)}{\left(\bar{t}_1 - t_1\right)} - \frac{1}{4}\right],$$

$$t_2 + t_1\left[\frac{3}{4}\frac{\left(t_2-\overline{t}_1\right)}{\left(\overline{t}_1-t_1\right)}-\frac{1}{4}\right]=\overline{t}_2\left\{1+\left[\frac{3}{4}\frac{\left(t_2-\overline{t}_1\right)}{\left(\overline{t}_1-t_1\right)}-\frac{1}{4}\right]\right\},$$

$$\overline{t}_2=\frac{t_2+t_1\left[\frac{3}{4}\frac{\left(t_2-\overline{t}_1\right)}{\left(\overline{t}_1-t_1\right)}-\frac{1}{4}\right]}{1+\left[\frac{3}{4}\frac{\left(t_2-\overline{t}_1\right)}{\left(\overline{t}_1-t_1\right)}-\frac{1}{4}\right]}.$$

Вычисление:

$$\overline{t}_2=\frac{30+20\left[\frac{3}{4}\frac{\left(30-23\right)}{\left(23-20\right)}-\frac{1}{4}\right]}{1+\left[\frac{3}{4}\frac{\left(30-23\right)}{\left(23-20\right)}-\frac{1}{4}\right]}=\frac{30+20\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{120}{5}=24\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Ответ: 24 º С.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Произведен учет тепла, затрачиваемого на нагревание стакана – 2 балла;
2. Записаны уравнения теплового баланса для двух случаев – 5 баллов;
3. Получено выражение для установившейся температуры во втором стакане – 4 балла;
4. Получен численный ответ – 1 балл.