Теоретический тур

7 класс

Задача 1.

Два друга – Егор и Петя – устроили гонки на велосипедах вокруг квартала в дачном посёлке (рис. 1). Стартовав одновременно из точки В в разные стороны, Егор – вдоль улицы ВА, Петя – вдоль улиц ВС и СА, друзья встретились через 4 минуты в точке А и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после этой встречи они снова окажутся вместе в точке А?

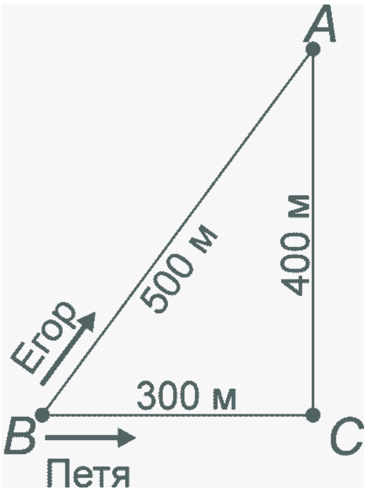

Рис. 1.

<u>Решение</u>. Скорость Егора $\frac{500}{4}\frac{\text{м}}{\text{мин}}$, а скорость Пети $\frac{700}{4}\frac{\text{м}}{\text{мин}}$. От точки A друзья совершают «круг» в 1200 м. Обозначим время следующей встречи t. За это время Егор сделает n_1 оборотов, а Петя n_2. Тогда путь, пройденный каждым будет определяться по формулам:

$$1200 \cdot n_1 = \frac{500}{4} t, \qquad 1200 \cdot n_2 = \frac{700}{4} t.$$

Отсюда число оборотов, сделанных каждым до встречи должно быть кратным:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{5}{7}.$$

Поэтому минимальное число оборотов равно: $n_1 = 5$, $n_2 = 7$. Тогда минимальное время равно:

$$1200 \cdot 5 = \frac{500}{4} t,$$

Ответ: $t = 48$ мин.

(15 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Найдены скорости движения велосипедистов – 1 балл;
2. Определено отношение числа оборотов, сделанных каждым велосипедистом до встречи – 8 баллов;
3. Найдено минимальное число оборотов – 2 балла;
4. Найдено минимальное время – 4 балла.

Задача 2.

Автомобиль все время ехал по прямой дороге. Несколько часов он двигался с постоянной скоростью 40 км/ч, затем 1 час простоял в пробке, после чего еще два часа продолжал движение со скоростью 60 км/ч и прибыл в пункт назначения. Найти среднюю скорость автомобиля за все время путешествия. Найти среднюю скорость за последние 2,5 часа движения.

Решение. Так как автомобиль один час простоял в пробке, после чего еще два часа продолжал движение со скоростью 60 км/ч, то за последние три часа он проехал расстояние 120 км. Таким образом, средняя скорость автомобиля за последние три часа была 40 км/ч. Но и до этого он двигался со скоростью 40 км/ч. Значит средняя скорость автомобиля за все время путешествия равна 40 км/ч. За последние 2,5 часа средняя скорость равна $\frac{120\ \text{км}}{2{,}5\ \text{ч}} = 48\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: 48 км/ч.

(15 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Найдена средняя скорость за все время движения – 8 баллов;
2. Найдена средняя скорость за последние 2,5 часа – 7 баллов.

Задача 3.

Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

Решение. Первое решение. Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Так как скорости паромов постоянны, то до второй встречи каждый из них пройдёт втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 метров, то до второй встречи он прошёл расстояние $720 \cdot 3 = 2160$ метров. При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 метров. Следовательно, ширина реки равна $2160 - 400 = 1760$ метров.

Второе решение. Пусть ширина реки равна S метров, а скорости паромов равны x и y. Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{720}{x} = \dfrac{S-720}{y} \\ \dfrac{S+400}{x} = \dfrac{2S-400}{y} \end{cases}$$

Разделим одно уравнение системы на другое, и после преобразований получаем

$$\frac{720}{S+400} = \frac{S-720}{2S-400},$$

$$720(2S-400) = (S-720)(S+400),$$

$$720 \cdot 2S - 400 \cdot 720 = S^2 + 400S - 720S - 720 \cdot 400,$$

$$720 \cdot 2S = S^2 - 320S,$$

$$1760S = S^2,$$

$$S = 1760$$

Ответ: $S = 1760$ м.

(15 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Получено выражение для ширины реки или приведены правильные рассуждения для ее нахождения – 8 баллов;
2. Получен численный ответ – 7 баллов.

Задача 4.

По прямой реке с постоянной скоростью u = 5 м/с плывёт баржа длиной L = 100 м. На корме баржи стоит матрос. Он начинает ходить по барже от кормы к носу и обратно. Вперёд он идет с постоянной относительно баржи скоростью v_1 = 1 м/с, а назад – с постоянной относительно баржи скоростью v_2 = 2 м/с. Какой путь пройдёт матрос относительно берега реки, если пройдёт по барже туда и обратно по n = 10 раз?

Решение. Вариант 1. Удобно перейти в систему отсчета, связанную с баржей. Время, затраченное матросом на то, чтобы один раз пройти по барже туда и обратно равно:

$$t_1 = \frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2} = L\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

Чтобы 10 раз пройти по барже туда и обратно, матрос затратит время

$$t = nt_1 = nL\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

За это время величина скорости движения матроса относительно берега меняется, но не меняется направление скорости ($u > v_2$). Кроме того, положение матроса на барже в начальный и конечный моменты времени одно и то же. Поэтому путь, пройденный матросом относительно берега за это время, равен пути, пройденному баржей за это же время. Так как скорость баржи u, то относительно земли матрос пройдет расстояние

$$s = ut = unL\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

Вариант 2. Путь, пройденный матросом относительно берега за время его движения от кормы до носа баржи, равен:

$$s_1 = \left(u + v_1\right)L/v_1.$$

На обратном пути матрос проходит относительно берега путь

$$s_2 = \left(u - v_2\right)L/v_2.$$

Полный путь за n циклов составит

$$s = n\left(s_1 + s_2\right) = unL\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}.$$

Вычисление:

$$s = 5 \cdot 10 \cdot 100\frac{1+2}{1 \cdot 2} = 7500 \text{ м}.$$

Ответ: 7500 м.

(15 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Использована система отсчета, связанная с баржей – 1 балл;
2. Найдено время движения матроса – 6 баллов;
3. Получено выражение для пути – 6 баллов;
4. Получен численный ответ – 2 балла.