11 класс

Задача 1.

Тело массой m=2 кг движется вдоль оси x по гладкой горизонтальной плоскости. График зависимости v_x от x показан на рисунке 1. Найти зависимость модуля силы, действующей на тело, от времени.

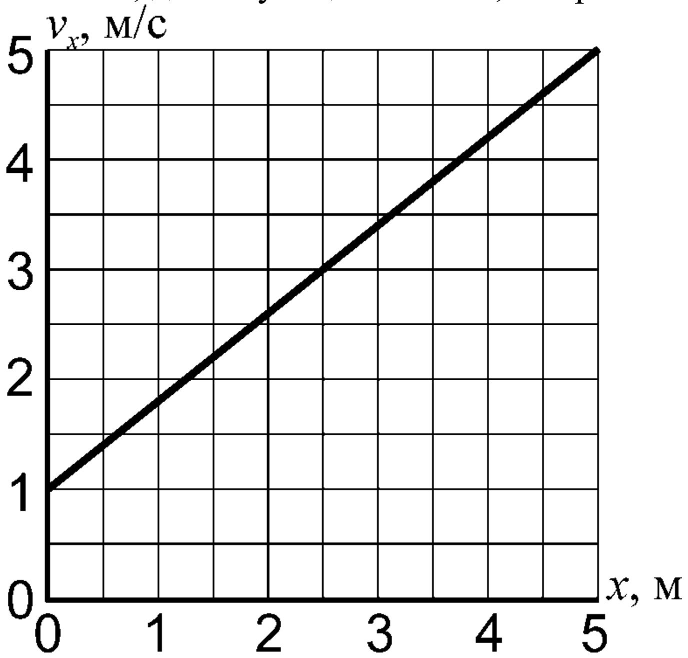

Рис. 1.

Решение. Из графика видно, что $\dfrac{dv_x}{dx} = \text{const}$:

$$v_x = v_{x0} + kx. \quad (1)$$

По определению скорости имеем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

По определению ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = kv_x = k\left(v_{x0} + kx\right) = kv_{x0} + k^2 x. \quad (3)$$

Согласно 2 закону Ньютона

$$F_x = ma_x. \quad (4)$$

Поэтому

$$F_x = m\left(kv_{x0} + k^2 x\right) = mkv_{x0} + mk^2 x. \qquad (5)$$

Из (1) и (2) следует:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{x0} + kx.$$

Разделяя переменные:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_{x0} + kx} = \mathrm{d}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{v_{x0}}{k} + x} = k\mathrm{d}t,$$

интегрируя, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{v_{x0}}{k} + x} = \int k\mathrm{d}t,$$

$$\ln\left(\frac{v_{x0}}{k} + x\right) = kt + C.$$

Константу интегрирования C найдем из условия, что при $t = 0$ координата $x = 0$. Отсюда

$$\ln\frac{v_{x0}}{k} = C.$$

Тогда

$$\ln\left(\frac{\frac{v_{x0}}{k} + x}{\frac{v_{x0}}{k}}\right) = \ln\left(1 + \frac{kx}{v_{x0}}\right) = kt.$$

Отсюда

$$1 + \frac{kx}{v_{x0}} = e^{kt},$$

$$x = \frac{v_{x0}}{k}\left(e^{kt} - 1\right). \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$F_x = mkv_{x0} + mkv_{x0}\left(e^{kt} - 1\right) = mkv_{x0}e^{kt}.$$

Из рисунка $v_{x0} = 1$ м/с, $k = 0{,}8$ с$^{-1}$. Поэтому

$$F_x(t) = 1{,}6e^{0{,}8t}.$$

Ответ: $F_x(t) = 1{,}6e^{0{,}8t}$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записаны выражения для скорости, ускорения и силы в общем виде – 3 балла;

2. Получена аналитическая зависимость координаты от времени – 5 баллов;
3. Использованы численные значения параметров из графика и получено конечное выражение для зависимости силы от времени – 4 балла.

Задача 2.

К свободным концам нерастяжимой и невесомой нити, середина которой закреплена, подвешены два шарика одинаковой плотности ρ и объема и одинаково заряженных. Шарики вместе с нитью помешены в жидкий диэлектрик (масло), плотность которого в два раза меньше плотности материала шариков. Под действием электрических сил шарики отталкиваются в масле на угол $\alpha = 60^\circ$, а в воздухе $\alpha_0 = 90^\circ$. Определить диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

Решение. Рассмотрим силы, которые действуют на произвольный шарик. Так как шарики находятся в покое, то условие равновесия запишется в виде:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{н}} + \vec{F}_{\text{К}} + \vec{F}_{\text{А}} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{К}}$ – кулоновская сила; $\vec{F}_{\text{А}}$ – сила Архимеда. Выберем оси координат и возьмем проекцию уравнения (1) на оси координат (рис. 2):

$$F_{\text{н}} \sin\frac{\alpha}{2} - F_{\text{К}} = 0, \qquad -mg + F_{\text{н}} \cos\frac{\alpha}{2} + F_{\text{А}} = 0.$$

Или

$$F_{\text{н}} \sin\frac{\alpha}{2} = F_{\text{К}}, \tag{1}$$

$$F_{\text{н}} \cos\frac{\alpha}{2} = mg - F_{\text{А}}. \tag{2}$$

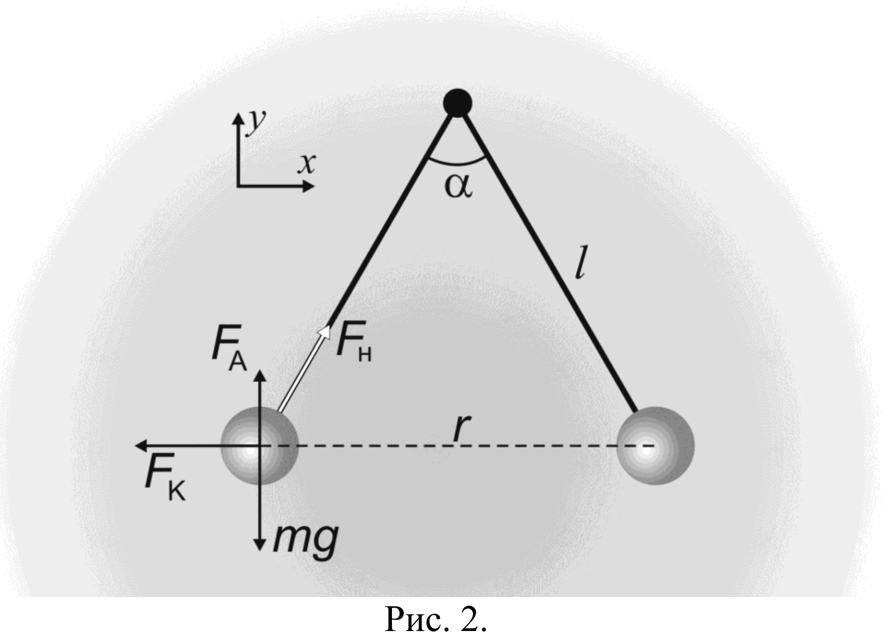

Рис. 2.

Поделив (1) на (2), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{F_\text{К}}{mg - F_\text{А}}.$$

Так как $F_\text{А} = \rho_\text{ж} gV$, $m = \rho V$, $F_\text{К} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$

то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 gV}\frac{1}{(\rho - \rho_\text{ж})\varepsilon r^2}.$$

Из рисунка

$$\frac{r}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 gVl^2}\frac{1}{(\rho - \rho_\text{ж})\varepsilon \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Используя формулу тригонометрии

$$\frac{1}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},$$

запишем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 gVl^2}\frac{1}{(\rho - \rho_\text{ж})\varepsilon}\frac{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

В воздухе

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 gV}\frac{1}{\rho r_0^2}.$$

Поделим уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha_0}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{(\rho - \rho_\text{ж})\varepsilon r^2}{\rho r_0^2}.$$

$$\frac{\sin^2\dfrac{\alpha_0}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha_0}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{(\rho - \rho_\text{ж})\varepsilon}{\rho},$$

$$\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}^3\frac{\alpha_0}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_0}{2}\right)\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\rho-\rho_{ж}\right)\varepsilon}{\rho}.$$

<u>Вычисление</u>:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)}{2\frac{1}{3\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\varepsilon=4\sqrt{3}.$$

Ответ: $\varepsilon=4\sqrt{3}$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записаны уравнения баланса сил, действующих на шарики в воздухе и диэлектрике – 4 балла;
2. Получено выражение для диэлектрической проницаемости – 6 баллов;
3. Получен численный ответ – 2 балла.

Задача 3.

Найдите сопротивление цепи с бесконечным числом звеньев (рис. 3). Сопротивление каждого отдельного элемента равно *R*.

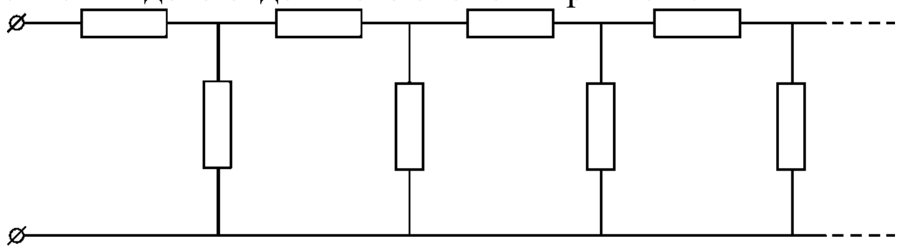

Рис. 3.

<u>Решение</u>. Задача приводится к простейшей схеме, представленной на рисунке 4.

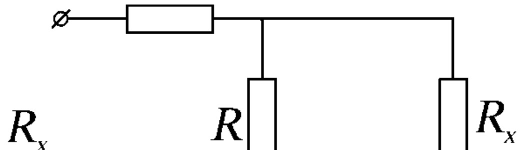

Рис. 4

Представляя как параллельное и последовательное соединение, для нее несложно получить:

$$R+\frac{RR_x}{R+R_x}=R_x,\qquad R^2+RR_x+RR_x=RR_x+R_x^2,$$

$$R_x^2-RR_x-R^2=0,$$

$$R_x = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R \pm \sqrt{5R^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} R.$$

Так как один корень не имеет физического смысла, то $R_x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R$.

Ответ: $R_x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Приведена эквивалентная схема цепи – 6 баллов;
2. Найдено общее сопротивление цепи – 6 баллов;

Задача 4.

Электрон из состояния покоя ускоряется в электрическом поле с разностью потенциалов U и затем влетает в электрическое поле конденсатора с напряженностью E параллельно его пластинам. Определить вертикальное смещение электрона y при вылете из конденсатора, если длина пластин конденсатора l.

Решение. Работа электрического поля идет на увеличении кинетической энергии:

$$eU = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Внутри конденсатора выберем оси координат: ось x – параллельно пластинам конденсатора, а y – перпендикулярно пластинам. Движение по оси x равномерное. Поэтому $x = vt$.

Движение по оси y равноускоренное с ускорением:

$$ma = eE, \quad a = \frac{eE}{m}.$$

Поэтому

$$y = \frac{at^2}{2}.$$

Время движения внутри конденсатора равно

$$t_1 = \frac{l}{v} = l\sqrt{\frac{m}{2eU}}.$$

Отсюда

$$y_1 = \frac{El^2}{4U}.$$

Ответ: $y_1 = \dfrac{El^2}{4U}$

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Найдена скорость при входе в конденсатор – 3 балла;
2. Найдено время движения в конденсаторе – 3 балла;
3. Найдено вертикальное смещение – 6 баллов.

Задача 5.

Закон преломления света записывается в виде

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

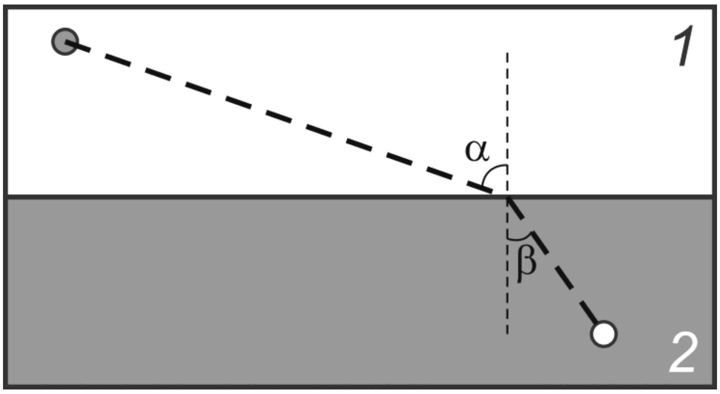

Рис. 5.

где α – угол падения, β – угол преломления, v_1 – скорость света в 1-ой среде, v_2 – скорость света во 2-ой среде (рис. 5). Доказать этот закон исходя из принципа Ферма: «Свет распространяется по пути, на преодолении которого затрачивается наименьшее время».

Решение.

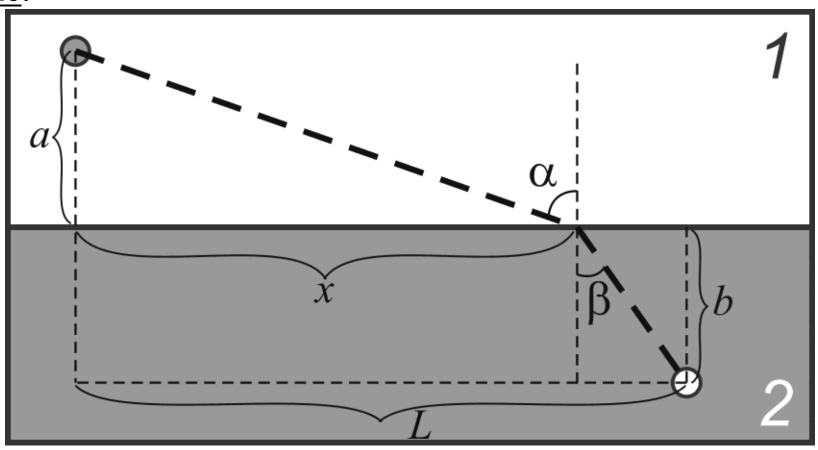

Рис. 6.

Время движения света равно:

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (L - x)^2}}{v_2} = t(x).$$

Взяв производную по x и приравняв нулю, получим

$$\frac{x}{v_1 s_1} - \frac{L-x}{v_2 s_2} = 0.$$

Так как

$$\frac{x}{s_1} = \sin\alpha, \quad \frac{L-x}{s_2} = \sin\beta,$$

то получаем

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

Отсюда следует закон преломления света.
(12 баллов)
Примерные критерии оценивания:

1. Записано общее выражение для времени движения света в двух средах – 3 балла;
2. Найдено условие, при котором время движения света будет минимальным – 6 баллов;
3. Получен закон преломления света – 3 балла.