10 класс

Задача 1.

Найти тангенс угла α, под которым необходимо бросить тело со скоростью $v_0 = 30$ м/с, чтобы попасть в цель, находящуюся на удалении $x_1 = 30$ м и на высоте $y_1 = 40$ м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Уравнение траектории имеет вид:

$$y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right).$$

Чтобы попасть в цель траектория должна проходить через координату цели:

$$y_1 = x_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx_1^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right),$$

$$y_1 = x_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx_1^2}{2v_0^2} - \frac{gx_1^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\alpha,$$

$$\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\alpha - x_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha + y_1 + \frac{gx_1^2}{2v_0^2} = 0.$$

Находим корни квадратного уравнения

$$\left(\mathrm{tg}\alpha\right)_{1,2}=\frac{x_1\pm\sqrt{x_1^2-4\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\left(y_1+\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\right)}}{2\frac{gx_1^2}{2v_0^2}},$$

$$\mathrm{tg}\alpha_1=\frac{1+\sqrt{1-2\frac{g}{v_0^2}\left(y_1+\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\right)}}{\frac{gx_1}{v_0^2}},$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{1-\sqrt{1-2\frac{g}{v_0^2}\left(y_1+\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\right)}}{\frac{gx_1}{v_0^2}}.$$

<u>Вычисление</u>

$$\left(\mathrm{tg}\alpha\right)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{2\cdot10}{30^2}\left(40+\frac{10\cdot30^2}{2\cdot30^2}\right)}}{\frac{10\cdot30}{30^2}}=$$

$$=\frac{1\pm0}{\frac{10}{30}}=3.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\alpha=3$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записано уравнение траектории тела – 5 баллов;
2. Записано уравнение для тангенса угла бросания – 2 балла;
3. Получено выражение для тангенса угла бросания – 4 балла;
4. Получен численный ответ – 1 балл.

Задача 2.

Тело, брошенное вертикально вверх, проходит некоторую точку на высоте H дважды, в различные моменты времени t_1 и t_2, такие что их произведение равно $t_1t_2=2\text{ с}^2$. Найти эту высоту H. Ускорение свободного падения $g=10\text{ м/с}^2$.

<u>Решение</u>. Высота H определяется по формуле

$$H=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Представим это выражение в виде квадратного уравнения:

$$\frac{g}{2}t^2-v_0t+H=0.$$

Корни этого уравнения:

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 4\frac{g}{2}H}}{2\frac{g}{2}} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g},$$

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}.$$

Отсюда

$$t_1 t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g} \cdot \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g} = \frac{v_0^2 - \left(v_0^2 - 2gH\right)}{g^2} =$$

$$= \frac{2gH}{g^2} = \frac{2H}{g}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

<u>Вычисление</u>:

$$H = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10 \ (\text{м}).$$

Ответ: $H = 10$ м.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записано выражение для перемещения при равноускоренном движении – 1 балл;
2. Получено выражение для высоты – 9 баллов;
3. Получен численный ответ – 2 балла.

Задача 3.

На вершине гладкой полусферической горки покоится очень маленькое тело массы m. От малого толчка тело начинает скользить по горке. Найти силу, с которой тело давит на поверхность горки (вес тела), как функцию высоты тела над основанием горки H. Найти высоту $H_{\min}$, при которой тело отрывается от горки.

<u>Решение</u>. Согласно закону сохранения механической энергии можно записать:

$$mgR = mgH + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{mv^2}{2} = mg\left(R - H\right),$$

$$v^2 = 2g\left(R - H\right). \qquad (1)$$

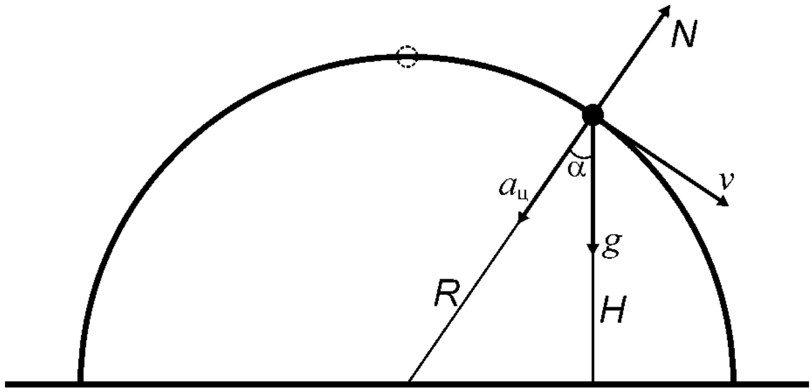

Рис. 1.

Запишем уравнение 2-го закона Ньютона в проекции на радиальное направление:

$$ma_{цс} = mg\cos\alpha - N\,.$$

Но центростремительное ускорение равно $a_{цс} = \dfrac{v^2}{R}$. Поэтому

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N\,.$$

Из рисунка 2 видно, что $\cos\alpha = \dfrac{H}{R}$. Отсюда

$$m\frac{v^2}{R} = mg\frac{H}{R} - N\,.$$

Так как по 3-ему закону Ньютона $N = P$, то

$$m\frac{v^2}{R} = mg\frac{H}{R} - P\,.$$

Отсюда

$$P = mg\frac{H}{R} - m\frac{v^2}{R}\,. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим

$$P = mg\left(3\frac{H}{R} - 2\right).$$

Отсюда из условия $P = 0$ найдем

$$H_{\min} = \frac{2}{3}R\,.$$

Ответ: $P = mg\left(3\dfrac{H}{R} - 2\right)$, $H_{\min} = \dfrac{2}{3}R$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записаны закон сохранения энергии и уравнение движения тела – 3 балла;
2. Получено выражение для веса тела, как функция высоты – 5 баллов;
3. Использован критерий отрыва тела от поверхности ($P = 0$) – 2 балла;
4. Получено выражение для высоты отрыва тела – 2 балла.

Задача 4.

С порцией азота (двухатомный газ) проводят циклический процесс, состоящий из двух изобар и двух изохор. Какой максимальный КПД может иметь этот процесс, если отношение давлений на изобарах равно 2?

Решение. Обозначим минимальный объем в цикле V, минимальное давление p. Это соответствует точке 1 (рис. 2). Пусть максимальный объем nV. Тогда полезная работа в цикле равна $A = 2p(nV - V) - p(nV - V) = pV(n-1)$.

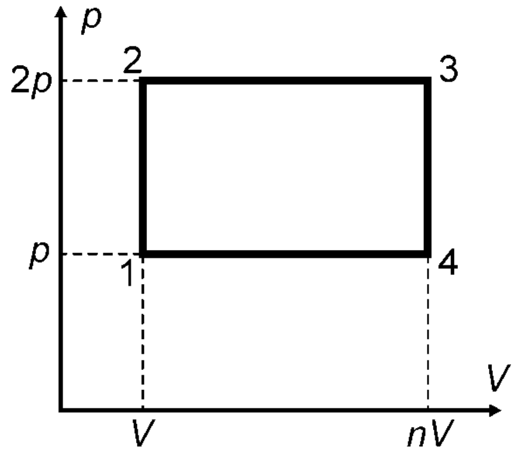

Рис. 2.

Найдем температуру на всех вершинах циклах. Пусть в точке 1 температура равна T:

$$pV = \nu RT$$

В точке 2 по изохоре V температуру находим из выражения:

$$2pV = \nu RT_2.$$

То есть $T_2 = 2T$. В точке 3 по изобаре $2p$:

$$2p \cdot nV = \nu RT_3.$$

То есть $T_3 = 2nT$. В точке 4 по изохоре nV:

$$p \cdot nV = \nu RT_4.$$

То есть $T_4 = nT$. Таким образом, максимальная температура в точке 3. Отсюда максимальное изменение температуры равно $\Delta T = (2n-1)T$. Тогда изменение внутренней энергии на участке 1-2-3 равно

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \nu C_v (2n-1)T.$$

Так как для двухатомного газа молярная теплоемкость равна $C_v = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R = 2,5R$, то

$$\Delta U = 2,5\nu RT(2n-1) = 2,5pV(2n-1).$$

Получаемое газом от нагревателя количество теплоты равно:

$$Q = \Delta U + A_{23}.$$

Работа на участке 2-3 равна:

$$A_{23} = 2pV(n-1).$$

Поэтому

$$Q = 2,5pV(2n-1) + 2pV(n-1).$$

Отсюда КПД равно

$$\eta=\frac{A}{Q}=\frac{pV(n-1)}{2{,}5pV(2n-1)+2pV(n-1)}=\frac{n-1}{2{,}5(2n-1)+2(n-1)}=$$

$$=\frac{n-1}{7n-4{,}5}.$$

Найдем предел этого выражения при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{7n-4{,}5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{7-\frac{4{,}5}{n}}=\frac{1}{7}.$$

Следовательно, максимальный КПД равен $\eta_{\max}=\dfrac{1}{7}$.

Ответ: $\eta_{\max}=\dfrac{1}{7}$.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Найдено количество теплоты, получаемое газом, и полезная работа – 4 балла;
2. Получено выражение для КПД – 4 балла;
3. Выполнен предельный переход и найдено максимальное КПД – 4 балла.

Задача 5.

Разноименные точечные заряды $+Q$ и $-q$ расположены на расстоянии a друг от друга. Покажите, что точки с нулевым потенциалом лежат на сфере. Найдите радиус этой сферы.

Решение. Выберем координатную ось так, что один из зарядов попадет в начало координат, а второй окажется на оси x. Запишем для произвольной точки с координатами x и y потенциал и приравняем его к нулю:

$$\varphi=k\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2}}-k\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=0.$$

Отсюда

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\frac{q}{Q}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$(x-a)^2+y^2=\left(\frac{q}{Q}\right)^2\left(x^2+y^2\right),$$

$$(x-a)^2+\left[1-\left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]y^2=\left(\frac{q}{Q}\right)^2x^2,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + \left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right] y^2 = \left(\frac{q}{Q}\right)^2 x^2,$$

$$\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right] x^2 - 2ax + a^2 + \left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right] y^2 = 0,$$

$$x^2 - \frac{2a}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]} x + \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]} + y^2 = 0,$$

$$x^2 - \frac{2a}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]} x + \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]^2} - \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]^2} + \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]} + y^2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{a}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2} - 1\right],$$

$$\left(x - \frac{a}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{q}{Q}\right)^2 \frac{a^2}{\left[1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2\right]^2}.$$

Введем обозначения:

$$b = \frac{a}{1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2}, \qquad R = \frac{\frac{q}{Q}}{1 - \left(\frac{q}{Q}\right)^2} a.$$

Запишем:

$$(x - b)^2 + y^2 = R^2.$$

А это есть уравнение окружности радиусом R, с координатами центра $(b, 0)$. Поскольку направление оси *y* в пространстве было произвольным, то данное решение остается верным при любом направлении оси *y*, в этом случае для точек с нулевым потенциалом мы всякий раз получаем в плоскости *Oxy* окружность, это означает, что геометрическим местом точек с нулевым потенциалом является сфера.

(12 баллов)

Примерные критерии оценивания:

1. Записано выражение для потенциала двух зарядов – 2 балла;
2. Получено уравнение окружности для нулевого потенциала – 6 баллов;
3. Найден радиус окружности – 2 балла;
4. Указана координата центра окружности – 2 балла.