

## 9 класс.

1. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a + k$  делится на  $b + k$  при всех натуральных  $k < b$ . Докажите, что  $a - k$  делится на  $b - k$  при всех натуральных  $k < b$ .

2. В кружке патриотической песни занимается 12 школьников, каждый из них знает несколько песен (возможно, ни одной). Будем говорить, что группа школьников может спеть песню, если ее знает хотя бы один член группы. Руководитель кружка заметил, что любая группа из 10 кружковцев может спеть ровно 20 песен, а любая группа из 8 кружковцев — ровно 16 песен. Докажите, что группа из всех 12 кружковцев может спеть ровно 24 песни.

3. Докажите, что точки пересечения биссектрис противоположных углов трапеции вместе с концами любого из её оснований лежат на одной окружности.

4. Будем говорить, что точка плоскости  $(u, v)$  лежит *между* параболой  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ , если  $f(u) \leq v \leq g(u)$ . Найдите наименьшее вещественное  $p$ , при котором выполнено следующее утверждение: любой отрезок, концы и середина которого лежат между параболой  $y = x^2$  и  $y = x^2 + 1$ , целиком лежит между параболой  $y = x^2$  и  $y = x^2 + p$ .

5. Есть две кучки камней: 1703 камня в одной кучке и 2022 в другой. Саша и Оля играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. Пусть перед ходом игрока кучи содержат  $a$  и  $b$  камней, причем  $a \geq b$ . Тогда своим ходом игроку разрешается взять из кучи с  $a$  камнями любое количество камней от 1 до  $b$ . Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ . На касательной в точке  $C$  к описанной окружности треугольника  $BCM$  отмечена точка  $D$  так, что  $\angle CBD = 90^\circ$ . Отрезки  $AD$  и  $BM$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $BDE$  лежит на прямой  $AC$ .

7. Даны  $n$  различных натуральных чисел, любые два из них получаются друг из друга перестановкой цифр (ноль на первое место ставить нельзя). При каком наибольшем  $n$  все эти числа могут делиться на наименьшее из них?