8 класс.

1. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

2. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. На отрезке BC выбрана точка X, а на отрезке BD — точка Y, причём $CX = EX$ и $AY = DY$. Лучи YA и XE пересекаются в точке Z. Докажите, что середина отрезка BZ лежит на прямой AE.

3. Найдите все целые числа x, y, для которых $x + y$, $2x + 3y$ и $3x + y$ — точные квадраты.

4. На столе стоят 100 гирь различных весов. Гиря называется удачной, если её вес равен сумме весов каких-то двух других гирь со стола. При каком наименьшем количестве удачных гирь можно заведомо утверждать, что веса каких-то двух гирь отличаются не менее чем в три раза?

5. В стране много городов, среди них 500 больших, остальные маленькие. Некоторые пары городов соединены дорогами так, что из любого города можно проехать в любой другой. Существует не меньше 10 000 маленьких городов, соединенных дорогой хотя бы с одним большим городом. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы из любого города все равно можно было бы проехать в любой другой, и было бы более 9000 городов, из которых выходит по одной дороге.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle ACB = 2\angle CAB$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена точка E. Докажите, что $BC + BE > DE$.

7. Дано простое число $p > 100$. Назовем нечетное составное число $n < 4p^2$ странным, если для каждого его собственного делителя q хотя бы одно из чисел $q + 2p$ или $q - 2p$ также является натуральным делителем n. Докажите, что количество странных чисел не превосходит $\frac{p}{3}$. (Собственным делителем числа n называется любой делитель, отличный от 1 и n.)