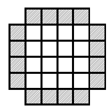
7 класс.

1. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

2. Очутившись на необитаемом острове, в первый же день Робинзон Крузо встретил туземца Пятницу. Робинзон знает, что Пятница по пятницам говорит только правду, а в другие дни лжет. Каждый день Робинзон Крузо задает Пятнице один вопрос вида «Верно ли, что сегодня такой-то день недели?». Может ли Робинзон за 4 дня гарантированно узнать, в какой день недели он очутился на необитаемом острове?

3. Натуральное число n называется *отличным*, если оно имеет хотя бы один нечетный простой делитель и сумма любых двух его простых делителей (в том числе одинаковых) является делителем числа n. Докажите, что любое отличное число делится на наименьшее отличное число.

4. Доска представляет собой квадрат 100×100 с вырезанными четырьмя угловыми клетками. В каждой клетке доски стоит число, причем каждое число (кроме чисел на границе доски) равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что сумма чисел на границе доски равна удвоенной сумме чисел на двух ее диагоналях. (Для примера на рисунке закрашены клетки на границе доски 6×6.)



5. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку K. Точка L — середина отрезка BK. Оказалось, что $\angle AKB = \angle ALC = 90^\circ$, $AK = CL$. Найдите углы треугольника ABC.

6. Найдите все тройки положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условиям $a+b+c = 3$, $a^2-a \geqslant 1-bc$, $b^2 - b \geqslant 1 - ac$, $\quad c^2 - c \geqslant 1 - ab$.

7. На рисунке изображен план города. Узлы — это перекрестки, а соединяющие их 35 линий — улицы. По улицам ездят N маршруток. Все маршрутки стартуют одновременно на перекрестках, и раз в минуту одновременно перемещаются по улицам на соседние перекрестки. При этом каждая из них движется по замкнутому несамопересекающемуся маршруту. На одном перекрестке могут оказаться сразу несколько маршруток, но ни по одной улице не может двигаться одновременно более одной маршрутки. Найдите наибольшее возможное значение N.