11 класс.

1. Можно ли на параболе $y = x^2$ отметить точки A, B, C, D, а на параболе $y = 2x^2$ — точки E, F, G, H так, чтобы выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$ оказались равными?

2. В остроугольном треугольнике ABC с углом 45° при вершине A проведены высоты AD, BE и CF. Луч EF пересекает прямую BC в точке X. Оказалось, что $AX \parallel DE$. Найдите углы треугольника ABC.

3. Иван и Кащей играют в следующую игру. Изначально на доске записан многочлен $x - 1$. За один ход можно заменить многочлен $f(x)$, записанный на доске, на многочлен $ax^{n+1} - f(-x) - 2$, где n — степень многочлена $f(x)$, а a — один из его вещественных корней. Игроки ходят по очереди, начинает Иван. Выигрывает тот игрок, после хода которого на доске будет написан многочлен, не имеющий вещественных корней. Сможет ли Иван победить Кащея?

4. Будем говорить, что набор чисел $a_1, \ldots, a_m$ *сильнее* набора чисел $b_1, \ldots, b_n$, если среди всех неравенств вида $a_i > b_j$ количество верных неравенств не менее чем в 2 раза превосходит количество неверных. Докажите, что не существует трех наборов A, B и C, таких что A сильнее B, B сильнее C, C сильнее A.

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На касательную, проведенную из точки C к описанной окружности треугольника AB_1C_1, опущен перпендикуляр HQ (точка Q лежит внутри треугольника ABC). Докажите, что окружность, проходящая через точку B_1 и касающаяся прямой AB в точке A, касается также и прямой A_1Q.

6. Найдите все пары ненулевых (не обязательно положительных) рациональных чисел x, y, обладающие следующим свойством: любое положительное рациональное число можно представить в виде $\{rx\}/\{ry\}$ с положительным рациональным r.

7. Есть $2n$ карточек, на каждой написано число от 1 до n (каждое — ровно на двух карточках). Карточки лежат на столе числами вниз. Набор из n карточек называется хорошим, если на них каждое число встречается по одному разу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может указать 80 наборов по n карточек, из которых хотя бы один заведомо окажется хорошим. При каком наибольшем n слова барона могут быть правдой?