

10 класс.

1. Можно ли на параболе $y = x^2$ отметить точки A, B, C, D , а на параболе $y = 2x^2$ — точки E, F, G, H так, чтобы выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$ оказались равными?

2. Пусть $p(n)$ — количество разбиений числа n в сумму натуральных слагаемых без учёта их порядка (например, $p(4) = 5$, поскольку $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$); $a(n)$ — количество разбиений числа n , в которых наименьшее слагаемое повторяется хотя бы два раза (например, $a(4) = 3$: подходят разбиения $2+2, 2+1+1$ и $1+1+1+1$). Докажите, что $a(n) = 2p(n) - p(n+1)$.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle DIC$.

4. Есть две кучки камней: 444 камня в одной кучке и 999 в другой. Саша и Федя играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. Пусть перед ходом игрока кучи содержат a и b камней, причем $a \geq b$. Тогда своим ходом игроку разрешается взять из кучи с a камнями любое количество камней от 1 до b . Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. Пусть $n > 2$ — натуральное число, $1 = a_1 < \dots < a_k = n - 1$ — все числа от 1 до n , взаимно простые с n . Обозначим через $f(n)$ наибольший общий делитель чисел $a_1^3 - 1, \dots, a_k^3 - 1$. Какие значения может принимать функция $f(n)$?

6. В треугольнике ABC проведена медиана BM . На касательной в точке C к описанной окружности треугольника BMC отмечена точка D так, что $\angle CBD = 90^\circ$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке E . Докажите, что центр описанной окружности треугольника BDE лежит на прямой AC .

7. Питерский бизнес-клуб «Эльдорадо» был основан много лет назад знаменитым миллионером Пафнутием Копейко, который в начале был его единственным членом. Потом клуб только расширялся, но по правилам каждый новый эльдорадовец должен быть личным другом ровно одного из старых членов клуба. Бизнесмена называют *неудачником*, если его состояние не превосходит среднего арифметического состояний всех его друзей в клубе, увеличенного на 1 биткоин. Сегодня оказалось, что в клубе $n + 1$ членов, все они неудачники, а сам Пафнутий вообще полностью разорен. Докажите, что состояние любого члена клуба не превосходит n^2 биткоинов.