9 класс.

1. Натуральные числа a и b таковы, что $a+k$ делится на $b+k$ при всех натуральных $k<b$. Докажите, что $a-k$ делится на $b-k$ при всех натуральных $k<b$.

Из условия следует, что число $a-b$ делится на любое число от $b+1$ до $2b-1$. Доказать же нужно, что оно делится на любое натуральное число $s<b-1$. В последовательности s, $2s$, $3s$, $\ldots$, встретится число от $b+1$ до $2b-1$. Число $a-b$ делится на него, а потому и на s.

2. В кружке патриотической песни занимается 12 школьников, каждый из них знает несколько песен (возможно, ни одной). Будем говорить, что группа школьников может спеть песню, если ее знает хотя бы один член группы. Руководитель кружка заметил, что любая группа из 10 кружковцев может спеть ровно 20 песен, а любая группа из 8 кружковцев — ровно 16 песен. Докажите, что группа из всех 12 кружковцев может спеть ровно 24 песни.

Выберем 10 кружковцев. Из них любые 2 знают 4 песни, которые не знакомы остальным 8 из выбранной десятки. Тогда если разбить десятку на 5 групп по 2 кружковца, получится, что каждая такая пара знает 4 песни, не знакомых остальным, это уже 20 песен. Следовательно, других песен в этой десятке нет, и для любых 5 пар кружковцев каждой известны индивидуальные 10 песен. Если разбить кружковцев на 6 пар, из сказанного выше, каждая пара знает ровно 4 песни, а остальные их не знают. Итого, общее число знакомых кружковцам песен 24.

3. Докажите, что точки пересечения биссектрис противоположных углов трапеции вместе с концами любого из её оснований лежат на одной окружности.

Пусть биссектрисы противоположных углов пересекаются в точках X и Y, биссектрисы соседних углов (которые перпендикулярны) — в точках Z и T. Тогда ZT параллельно основаниям (и лежит на средней линии трапеции), а точки Z, T, X, Y лежат на окружности с диаметром XY. Из этого сразу следует требуемое утверждение.

4. Будем говорить, что точка плоскости (u,v) лежит *между* параболами $y=f(x)$ и $y=g(x)$, если $f(u)\leqslant v\leqslant g(u)$. Найдите наименьшее вещественное p, при котором выполнено следующее утверждение: любой отрезок, концы и середина которого лежат между параболами $y=x^2$ и $y=x^2+1$, целиком лежит между параболами $y=x^2$ и $y=x^2+p$.

Ответ: 9/8. Рассмотрим отрезок s, концы и середина которого лежат между исходными параболами, а сам он пересекает параболу. Пусть он лежит на прямой $y=kx+\ell$. Две исходные параболы высекают на ней три отрезка AB, BC и CD. Из теоремы Виета сразу следует, что $AB=CD$. Концы отрезка s лежат на отрезках AB и CD, а середина, не умаляя общности, на отрезке CD. Легко понять, что существование такого отрезка равносильно условию $BC\leqslant CD$. Вычислив абсциссы $x_B=(k-\sqrt{k^2+4\ell-4})/2$, $x_C=(k+\sqrt{k^2+4\ell-4})/2$ и $x_D=(k+\sqrt{k^2+4\ell})/2$, и упростив неравенство $x_C-x_B\leqslant x_C-x_D$, получим условие $k^2+4\ell\leqslant 9/2$ (*).

Докажем, что не только отрезок s, но и вся прямая $y=kx+\ell$ лежит под параболой $y=x^2+9/8$. Для этого достаточно проверить, что дискриминант уравнения $x^2-kx-\ell+9/8=0$ меньше или равен 0, т.е. как раз $k^2+4\ell-9/2\leqslant 0$.

С другой стороны, прямая $y=9/8$ (т.е. $k=0$, $\ell=9/8$) обеспечивает равенство в условии (*). В этом случае нужный отрезок на этой прямой имеет вид BD с серединой C. Он заведомо пересекает любую параболу $y=x^2+p$ при $p<9/8$.

5. Есть две кучки камней: 1703 камня в одной кучке и 2022 в другой. Саша и Оля играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. Пусть перед ходом игрока кучи содержат a и b камней, причем $a\geqslant b$. Тогда своим ходом игроку разрешается взять из кучи с a камнями любое количество камней от 1 до b. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Саша. Предположим, что позиция $a>b$ является проигрышной. Тогда все позиции $(a-k,b)$ при $k=1,\ldots,b$ выигрышные. Но раз $a-1\geqslant b$ — выгрышная, то из неё можно получить какую-то проигрышную, и ей может быть лишь позиция $(a-b-1,b)$. Такими процедурами можно получить проигрышные позиции: $(2022,1703\to(1703,318)\to(318,108)\to(108,100)\to(100,7)\to(7,4)$. Однако несложно убедиться, что эта позиция выигрышная. ССледовательно, исходная позиция также выигрышная.

6. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На касательной в точке C к описанной окружности треугольника BMC отмечена точка D так, что $\angle CBD=90^\circ$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BDE лежит на прямой AC.

Пусть N — середина BD, X — середина CD, O — пересечение прямых NX (т.е. серединного перпендикуляра к BD) и AC. Тогда $\angle BMC=\angle BCX=\angle BXN$, откуда $BMOX$ — вписанный. Поэтому $\frac{1}{2}\angle BOD=\angle BOX=\angle BMX=\angle BED$ (последнее в силу того, что MX — средняя линия в ACD), т.е. E лежит на окружности с центром в O, проходящей через B и D, что и требовалось доказать.

7. Даны n различных натуральных чисел, любые два из них получаются друг из друга перестановкой цифр (ноль на первое место ставить нельзя). При каком наибольшем n все эти числа могут делиться на наименьшее из них?

Ответ: 9. *Ясно, что больше девяти чисел быть не может.*

Мы будем пользоваться известным свойством периода чисто периодической рациональной дроби $\alpha = a/b < 1$ *со взаимно простыми* (a, b)*: длина периода равна наименьшему натуральному* t*, для которого* $(10^t - 1) \vdots b$*, а сам период* T *равен числу* $(10^t - 1)\alpha$.

Из этого следует, что если a_1/b *и* a_2/b *— две правильные несократимые дроби, причем* $a_1 = ka_2$*, то период первой дроби ровно в* k *раз больше периода второй.*

Рассмотрим дроби $2/19$, $4/19$, $6/19$, $8/19$, $10/19$, $12/19$, $14/19$, $16/19$, $18/19$. *Они имеют период одной и той же длины, и все они делятся на период* $2/19$, *равный* 105263157894736842. *С другой стороны, можно проверить, что* 10 *является первообразным корнем по модулю* 19. *Поэтому числа* $2 \cdot 10^s/19$ *при* $0 \leqslant s \leqslant 17$

Можно проверить, что 10 *является первообразным корнем по модулю* 19. *Поэтому числа* $10^s/19$ *при* $0 \leqslant s \leqslant 17$ *после удаления целой части являются всеми* 18 *правильными несократимыми дробями со знаменателем* 19. *Их периоды имеют одинаковую длину и получаются из периода дроби* $2/19$ *циклическими сдвигами на* s *цифр вправо. В частности, они все состоят из одинакового набора цифр. (И все, кроме* $1/19$*, не начинаются с нуля, т.е. представляют из себя натуральные числа одинаковой длины). Из предыдущего абзаца вытекает, что периоды дробей* $4/19$, $6/19$, $8/19$, $10/19$, $12/19$, $14/19$, $16/19$, $18/19$ *делятся на период дроби* $2/19$ *и вместе они образуют пример из* 9 *чисел.*