8 класс.

1. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

См. решение задачи 6.2.

2. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. На отрезке BC выбрана точка X, а на отрезке BD — точка Y, причём $CX = EX$ и $AY = DY$. Лучи YA и XE пересекаются в точке Z. Докажите, что середина отрезка BZ лежит на прямой AE.

Решение. Пусть прямые AC и BZ пересекаются в точке M. Треугольники ATE и BDC равны по второму признаку, поэтому равны и их высоты на прямую AC.

3. Найдите все целые числа x, y, для которых $x+y$, $2x+3y$ и $3x+y$ — точные квадраты.

Ответ: $x = y = 0$. Пусть $x+y = a^2$, $2x+3y = b^2$ и $3x+y = c^2$. Заметим, что $2b^2+c^2 = 7a^2$. Докажем, что это уравнение имеет единственное решение: $a = b = c = 0$. Действительно, пусть (a, b, c) — решение с минимальной суммой $a^2+b^2+c^2$, в котором не все числа a, b, c равны 0. Тогда $2b^2+c^2 \vdots 7$. Легко видеть, что это возможно только если $b \vdots 7$ и $c \vdots 7$. Но тогда $7a^2 \vdots 49$, откуда $a \vdots 7$. Сократив a, b, c на 7, мы получим новое ненулевое решение с меньшей суммой $a^2+b^2+c^2$. Противоречие. Итак, $a = b = c = 0$. Тогда $x = \frac{c^2-a^2}{2} = 0$ и $y = a^2 - x = 0$.

4. На столе стоят 100 гирь различных весов. Гиря называется удачной, если её вес равен сумме весов каких-то двух других гирь со стола. При каком наименьшем количестве удачных гирь можно заведомо утверждать, что веса каких-то двух гирь отличаются не менее чем в три раза?

Ответ: 87. Пусть есть 87 удачных чисел. Если одно из двух слагаемых удачного числа $a = b + c$ — само удачное, например, $b = d + e$, то $a = c + d + e \geqslant 3\min(c, d, e)$, то есть найдутся два числа, отличающиеся хотя бы в три раза. Если же все слагаемые восьмидесяти семи удачных чисел находятся среди 13 неудачных, то каждое удачное число равно одной из $13 \cdot 12/2 = 78$ их попарных сумм — противоречие.

Пример с 86 удачными числами: берем 14 почти одинаковых чисел и 86 из их $14 \cdot 13/2 = 91$ попарных сумм объявляем удачными числами. Например, рассмотрим числа $1+\varepsilon$, $1+2\varepsilon$, $1+2^2\varepsilon$, ..., $1+2^{12}\varepsilon$. Все их попарные суммы различны, больше исходных чисел, и наибольшая из них $2+2^{12}\varepsilon+2^{13}\varepsilon = 2+3\cdot 2^{12}\varepsilon < 3(1+\varepsilon) = 3+3\varepsilon$ при очень маленьком ε.

5. В стране много городов, среди них 500 больших, остальные маленькие. Некоторые пары городов соединены дорогами так, что из любого города можно проехать в любой другой. Существует не меньше 10 000 маленьких городов, соединенных дорогой хотя бы с одним большим городом. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы из любого города все равно можно было бы проехать в любой другой, и было бы более 9000 городов, из которых выходит по одной дороге.

Выберем остовный лес из 500 деревьев, корни которого — большие города, а на первых рангах расположены все 10000 маленьких городов, смежных с большими. В каждом дереве этого леса висячих вершин хотя бы столько, сколько вершин первого ранга (на каждой вершине первого ранга висит хотя бы одна висячая вершина), т.е. в сумме хотя бы 10000. Теперь восстановим связность, соединив каким-то путем последовательно деревья друг с другом; каждый путь портит не более двух висячих вершин, итого испрочено не больше $2 \cdot 499$, осталось больше чем 9000 висячих вершин.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle ACB = 2\angle CAB$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена точка E. Докажите, что $BC + BE > DE$.

Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = 2\alpha$. Отметим точку D', симметричную D относительно прямой AC. Тогда $AD'BC$ — равнобедренная трапеция, следовательно, $\angle BD'C = \angle D'CA = \angle DCA = \angle CAB = \alpha$ и $\angle BCD' = \angle ACB - \angle D'CA = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Таким образом, треугольник $D'BC$ — равнобедренный. Тогда $BC + BE = D'B + BE > D'E = DE$. (Неравенство строгое, поскольку точки D', B и E не лежат на одной прямой. Действительно, $D'B \parallel AC$, но $BE \nparallel AC$.)

7. Дано простое число $p > 100$. Назовем нечетное составное число $n < 4p^2$ странным, если для каждого его собственного делителя q хотя бы одно из чисел $q+2p$ или $q-2p$ также является натуральным делителем n. Докажите, что количество странных чисел не превосходит $\frac{p}{3}$. (Собственным делителем числа n называется любой делитель, отличный от 1 и n.)

Пусть n — странное число. Предположим, что $n \vdots p$. Тогда $n \vdots p + 2p = 3p \vdots 3$, а значит, $n \vdots 2p+3$. Так как числа 3, p и $p+3$ попарно взаимно просты, $n \vdots 3p(3+2p) > 4p^2$, противоречие. Итак, n не кратно p, а значит, все делители n нечетны и не кратны p.

Докажем, что число n не может иметь два делителя, меньших, чем $2p$.

От противного, рассмотрим два наименьших делителя $q_1 < q_2 < 2p$. Тогда $n \vdots q_1 + 2p$ и $n \vdots q_2 + 2p$. Если $(q_1+2p, q_2+2p) = 1$, то $n \vdots (q_1+2p)(q_2+2p) > 4p^2$, что не так. Значит, $(q_1+2p, q_2+2p) = d > 1$, и d является делителем n. Очевидно, $d \leqslant q_2 - q_1 < q_2 < 2p$ и при этом $d \neq q_1$, что противоречит минимальности q_1 и q_2. Утверждение доказано.

Число n составное, поэтому его минимальный простой делитель q заведомо не больше чем $\sqrt{n} < 2p$. Согласно лемме, других делителей, меньших $2p$, у n нет. По условию $n \vdots q + 2p$, и, поскольку q и $q + 2p$ взаимно просты, $n \vdots q(q + 2p)$. Кроме того, заметим, что $q + 2p$ — простое число: в противном случае оно имело бы делитель, не превосходящий $(q + 2p)/2 < 2p$, отличный от q, что противоречит лемме.

Докажем, что $n = q(q + 2p)$. В самом деле, в противном случае $n = q(q + 2p)r$ для какого-то $r > 1$. Число r, очевидно, меньше $2p$, и по лемме обязано совпадать с q. Тогда $n = q^2(q + 2p)$ и $q^2 < 2p$ — снова нашелся второй делитель, меньший $2p$.

Итак, n обязано быть произведением двух простых чисел вида $q(q + 2p)$. Прежде всего, q может быть равно 3 — это один из вариантов. Пусть $q \neq 3$. Поскольку вторая скобка не может делиться на 3, q должно отличаться от p по модулю 3.

Если $p = 3k+1$, то $q \equiv 2 \pmod 3$, и в силу нечетности $q \equiv 5 \pmod 6$. Таких чисел, меньших $2p = 6k+2$, всего k штук: $6s - 1$ при $1 \leqslant s \leqslant k$. При этом, $6 \cdot 6 - 1 = 35$ не простое, поэтому остается не более $k - 1$ вариантов, а учитывая случай $q = 3$, получаем, что странных чисел не больше $k < p/3$.

Аналогично, если $p = 3k + 2$, то $q \equiv 1 \pmod 3$, $q \equiv 1 \pmod 6$ и все эти числа меньше $2p = 6k + 4$. Этих чисел снова не более $k - 1$ штук: $6s + 1$, $1 \leqslant s \leqslant k$, исключая 25. И опять странных чисел не больше $k < p/3$.