7 класс.

1. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

См. решение задачи 6.2.

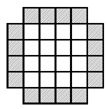
2. Очутившись на необитаемом острове, в первый же день Робинзон Крузо встретил туземца Пятницу. Робинзон знает, что Пятница по пятницам говорит только правду, а в другие дни лжет. Каждый день Робинзон Крузо задает Пятнице один вопрос вида «Верно ли, что сегодня такой-то день недели?». Может ли Робинзон за 4 дня гарантированно узнать, в какой день недели он очутился на необитаемом острове?

Ответ: сможет. Зададим Пятинце вопрос «Верно ли, что сегодня понедельник?» Ответ «Нет» может быть дан лишь в пятницу или понедельник. Если Робинзон задаст этот вопрос три дня подряд и услышит хотя бы один отрицательный ответ, то следующий после этого ответа день — суббота или вторник, и легко можно отличить их друг от друга еще одним вопросом (например, про субботу). Если же все три раза услышит ответ «Да», то эти три дня — не пятницы и не понедельники. Есть лишь один такой трехдневный иинтервал: вторник, среда, четверг.

3. Натуральное число n называется *отличным*, если оно имеет хотя бы один нечетный простой делитель и сумма любых двух его простых делителей (в том числе одинаковых) является делителем числа n. Докажите, что любое отличное число делится на наименьшее отличное число.

Докажем, что любое отличное число кратно $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$ *(а само это число отличное, в чем несложно убедиться). В самом деле, отличное число кратно* 2 *(возьмём одинаковые простые делители). Пусть p — минимальный нечетный простой делитель, тогда $p+2$ — тоже нечетный делитель, причем простой, иначе p не минимальный. Тогда $2p+2$ — тоже делитель, а значит, и $p+1$. Значит, $p+1$ — степень* 2 *(иначе снова есть нечетный делитель, меньший p). Итак, p и $p+2$ — простые близнецы, между которыми стоит степень двойки. Это могут быть лишь* 3 *и* 5 *(одно из этих двух простых всегда кратно* 3*). Итак, число кратно* 2, 3, 5, *а отсюда* 7, 8 *и* 9.

4. Доска представляет собой квадрат 100×100 с вырезанными четырьмя угловыми клетками. В каждой клетке доски стоит число, причем каждое число (кроме чисел на границе доски) равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что сумма чисел на границе доски равна удвоенной сумме чисел на двух ее диагоналях. (Для примера на рисунке закрашены клетки на границе доски 6×6.)



Обозначим за A множество граничных клеток. Мысленно отрежем их, получив доску 98×98. Множество из четырех ее угловых клеток обозначим за B. Множество граничных клеток доски 98×98 с вырезанными углами обозначим за C; наконец, множество ее внутренних клеток — за D. За S_A и т.д. будем обозначать сумму чисел в соответствующем множестве.

	A	A	A	A	
A	B	C	C	B	A
A	C	D	D	C	A
A	C	D	D	C	A
A	B	C	C	B	A
	A	A	A	A	

Для каждого числа, кроме граничных (то есть для чисел вида B, C и D) запишем условие задачи: учетверенное это число равно сумме соседних. Сложив все эти равенства, мы получим: $4S_B + 4S_C + 4S_D = S_A + 2S_B + 3S_C + 4S_D$ (каждая клетка из A участвует в одной сумме, каждая клетка из B — в двух, из C — в трёх, из D — в четырёх суммах). Следовательно, $S_A = S_C + 2S_B$.

Мы выразили сумму граничных чисел как сумму граничных чисел уменьшенной доски и удвоенную сумму крайних чисел на диагоналях. Продолжая этот процесс далее, мы получим в итоге, что сумма граничных чисел равна удвоенной сумме всех чисел на диагоналях.

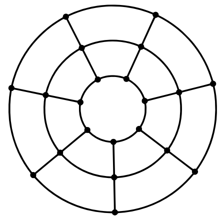
5. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку K. Точка L — середина отрезка BK. Оказалось, что $\angle AKB = \angle ALC = 90°$, $AK = CL$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: треугольник равносторонний. Заметим, что $\triangle ALC = \triangle BKA$ по катету и гипотенузе. Отсюда $AL = BK = 2KL$, поэтому $\angle KAL = 30$. Кроме того, сумма углов BAK и CAL в этих треугольниках равна 90, *поэтому $\angle BAC = 90 - 30 - 60$.*

6. Найдите все тройки положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условиям $a+b+c = 3$, $a^2 - a \geqslant 1 - bc$, $b^2 - b \geqslant 1 - ac$, $\quad c^2 - c \geqslant 1 - ab$.

Ответ: $a = b = c = 1$. Если ни одно из чисел не равно 1, то есть два с одной стороны от 1, *пусть это a и b. Сложим первые два условия и заменим $c = 3 - a - b$. Получим $(a-1)(b-1) \leqslant 0$, противоречие. Если же $c = 1$, то $a + b = 2$ и из третьего условия $ab \geqslant 1$, так бывает лишь при $a = b = 1$.*

7. На рисунке изображен план города. Узлы — это перекрестки, а соединяющие их 35 линий — улицы. По улицам ездят N маршруток. Все маршрутки стартуют одновременно на перекрестках, и раз в минуту одновременно перемещаются по улицам на соседние перекрестки. При этом каждая из них движется по замкнутому несамопересекающемуся маршруту. На одном перекрестке могут оказаться сразу несколько маршруток, но ни по одной улице не может двигаться одновременно более одной маршрутки. Найдите наибольшее возможное значение N.



Ответ: 35 *(по числу улиц), т.е. можно запустить маршрутки так, чтобы в любой момент времени по каждой улице двигалась ровно одна маршрутка. Очевидно,* N *не может быть больше* 35, *т.к. иначе уже в первую минуту какие-то две маршрутки неминуемо окажутся на одной и той же улице. Приведем пример для* 35 *маршруток. Семь маршруток запустим по часовой стрелке по среднему кольцу. Остальные* 28 *маршруток будут двигаться по часовой стрелке по периметрам семи квадратов* 2×2, *по четыре на каждом, изначально располагаясь в вершинах этих квадратов. Нетрудно убедиться (принимая во внимание круговую симметричность конструкции), что в любой момент времени по каждой улице едет ровно одна маршрутка.*