

## Условия и решения второго тура.

### 6 класс.

1. Существует ли 100-значное число без нулей в записи, которое кратно всевозможным суммам своих цифр (в частности, всем своим цифрам)?

*Ответ: нет. Какая-то из цифр присутствует не меньше 10 раз, поэтому число делится на 10, т.е. содержит в записи 0.*

2. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

*Каждая задача приносит суммарно человеку не более 4 баллов. Значит, сумма всех результатов — не более 44 баллов. Но если бы нашлось 10 различных результатов, их сумма оказалась бы не меньше 45.*

3. Владик задумал натуральное число  $N$ . Он поделил его на один из его простых делителей и записал результат на доску. Затем он поделил этот результат на один из его простых делителей и записал на доску новый результат. Так он действовал до тех пор, пока не записал на доску 1. Эта единица оказалась  $22$ -м числом, записанным на доске. Оказалось, что сумма всех записанных чисел равна  $N/2$ . Чему могло быть равно  $N$ ?

*Ответ:  $2 \cdot 3^{21}$ . Запишем сумму с конца:  $1 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \dots = N/2$ . Если бы  $p_1$  было нечетным делителем  $N$ , то правая часть делилась бы на  $p_1$ , чего не может быть, поскольку левая часть на  $p_1$  не делится из-за первого слагаемого. Значит,  $p_1 = 2$ . Подставим:  $3 + 2p_2 + 2p_2 p_3 + \dots = N/2$ . Левая часть нечетна, значит,  $N$  содержало единственный множитель  $p_1 = 2$ , а остальные  $p_i$  нечетны. Тогда правая часть делится на  $p_2$ , откуда  $p_2 = 3$ . Подставим:  $9 + 6p_3 + \dots = N/2$ . Аналогично рассуждая, последовательно находим, что все остальные  $p_i$  равны 3.*

4. Можно ли составить какой-нибудь прямоугольник, взяв квадраты  $1 \times 1$ ,  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ , ...,  $85 \times 85$  и  $2021 \times 2021$  (по одному разу каждый) и добавив ним несколько квадратов  $2 \times 2$ ?

*Ответ: нет. Общая площадь четная, поэтому одна из сторон составленного прямоугольника (пусть горизонтальная) должна быть четной. Покрасим клетки прямоугольника в два цвета вертикальным матрасиком, цветов будет поровну. Но большой квадрат дает перевес одного из цветов в 2021, и его не скомпенсировать меньшими нечетными квадратами.*

5. В 1685 г., очутившись на необитаемом острове, туземец Пятница в первый же день встретил Робинзона Крузо. Добрые духи обучили Пятницу европейскому календарю и подсказали, что лишь один день в году — 13 февраля — Робинзон говорит правду, а в другие дни врет. Каждый день Пятница задает Робинзону Крузо один вопрос вида «Верно ли, что сегодня такое-то число такого-то месяца?». Сможет ли Пятница за 183 дня узнать дату своего появления на необитаемом острове?

*Ответ: да. Занумеруем дни года от нулевого (13 февраля) до 364-го. Отметим на календаре 183-й день, назовем его «день X». Между нулевым днем и днем X проходит 182 дня, а между днем X и нулевым днем — 181 день.*

*Пусть Пятница первые 181 раза спрашивает, верно ли, что сегодня день X. Как только он услышит ответ «нет», это значит, что сейчас либо нулевой день, либо день X. Тогда следующим вопросом он сможет выяснить, какой из этих двух дней был вчера (например, спросив про 14 февраля). Если же 182 раза подряд Пятница получает ответ «да», то это значит, что 182 раза подряд был не нулевой день и не день X, а это возможно лишь если он начал задавать вопросы 14 февраля.*

6. На пристань прибыли 9 грузовиков. Каждый из них привез не более 10 тонн грузов, причем известно, что масса каждого отдельного груза не превосходит 1 тонны. На пристани имеется 10 барж грузоподъемностью  $k$  тонн каждая. При каком наименьшем  $k$  весь доставленный груз гарантированно можно увезти на баржах?

*Ответ: при  $k = 180/19 = 10 - 10/19$  тонн. Оценка. Если все предметы весят по  $10/19$  т., и их всего  $9 \cdot 19 = 171$  штука, то на какой-то барже их окажется не меньше 18 штук, и они вместе будут весить не меньше  $180/19$  т.*

*Пример. Для погрузки на баржи надо снять с каждой машины предметы массой между  $10/19$  и  $20/19$  т.; тогда оставшееся содержимое каждой машины влезет на отдельную баржу, а всё снятое весит не более  $9 \cdot 20/19 = 180/19$  т., и это всё влезает в 10-ю баржу.*

*Для реализации этого плана для конкретной машины будем снимать с неё предметы по убыванию. Если первый снятый кусок оказался больше  $10/19$ , то процес окончен: он не больше 1 и тем более не больше  $20/19$ . Если же он не больше  $10/19$ , то все следующие куски тем более не превосходят  $10/19$  и, когда мы будем снимать их по одному (уже в любом порядке), общая сумма снятых предметов не сможет перескочить через отрезок  $[10/19, 20/19]$ . Если же суммарный вес всех грузов в этой машине меньше  $10/19$ , то ничего снимать и не надо.*