11 класс.

1. Можно ли на параболе $y = x^2$ отметить точки A, B, C, D, а на параболе $y = 2x^2$ — точки E, F, G, H так, чтобы выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$ оказались равными?

См. решение задачи 10.7.

2. В остроугольном треугольнике ABC с углом 45° при вершине A проведены высоты AD, BE и CF. Луч EF пересекает прямую BC в точке X. Оказалось, что $AX \parallel DE$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 45, 60, 75. *Из условия следует, что $AF = FC$. Из вписанностей $\angle CDE = 45$, и теперь из параллельности $\angle AXD = 45$. В треугольнике AXC точка F оказалась центром описанной окружности (равноудалена от вершин A и C и центральный угол в два раза больше вписанного). Поэтому $2\angle ACB = \angle AFX = \angle BFE$, что вместе со вписанностью $BFEC$ дает $\angle ACB = 60^\circ$.*

3. Иван и Кащей играют в следующую игру. Изначально на доске записан многочлен $x - 1$. За один ход можно заменить многочлен $f(x)$, записанный на доске, на многочлен $ax^{n+1} - f(-x) - 2$, где n — степень многочлена $f(x)$, а a — один из его вещественных корней. Игроки ходят по очереди, начинает Иван. Выигрывает тот игрок, после хода которого на доске будет написан многочлен, не имеющий вещественных корней. Сможет ли Иван победить Кащея?

Ответ: не сможет; Кощей сможет играть вечно. Ивану достается многочлен нечетной степени, поэтому он не может проиграть. Однако Кощей тоже может не проигрывать: для этого ему достаточно каждый раз выбирать положительный корень. Заметим, что свободный член всегда равен -1. Легко проверить, что при такой стратегии Кощея Ивану будут доставаться многочлены, нечетной степени с чередующимися знаками коэффициентов (старший — положительный), и поэтому у них есть лишь положительные корни; а Кощею будут доставаться многочлены четной степени с положительным старшим коэффициентом и свободным членом -1, поэтому у них существует положительный корень.

4. Будем говорить, что набор чисел $a_1, \ldots, a_m$ *сильнее* набора чисел $b_1, \ldots, b_n$, если среди всех неравенств вида $a_i > b_j$ количество верных неравенств не менее чем в 2 раза превосходит количество неверных. Докажите, что не существует трех наборов A, B и C, таких что A сильнее B, B сильнее C, C сильнее A.

Предположим, что наборы $A = (a_1, \ldots, a_m)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $C = (c1, \ldots, c_k)$ сильнее друг друга по циклу. Для каждой тройки чисел (a_i, b_j, c_k) посчитаем сколько в ней верных неравенств среди $a_i > b_j > c_k > a_i$ (ясно, что это количество не превосходит двух) и сложим все эти числа. Сумма окажется не больше $2mnk$. С другой стороны, каждое неравенство $a_i > b_j$ (которых по условию не меньше чем $2mn/3$) участвует в k таких тройках. Аналогичное утверждение верно и про неравенства вида $b_j > c_k$ и вида $c_k > a_i$. Следовательно, суммарное число неравенств не меньше, чем $3 \cdot 2mnk/3 = 2mnk$. Значит, в обоих подсчетах наблюдалось равенство.

Рассмотрим теперь максимальное из всех чисел, пусть это a_1. В любой тройке (a_1, b_j, c_k) должно быть ровно два верных неравенства, поэтому заведомо $b_j > c_k$. Значит, неравенств вида $b_j > c_k$ уже nk штук, то есть точно не $2nk/3$. Противоречие.

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На касательную, проведенную из точки C к описанной окружности треугольника AB_1C_1, опущен перпендикуляр HQ (точка Q лежит внутри треугольника ABC). Докажите, что окружность, проходящая через точку B_1 и касающаяся прямой AB в точке A, касается также и прямой A_1Q.

Решение. Обозначим окружность (AB_1C_1) через s_1, а окружность, проходящую через точку B_1 и касающаяся прямой AB в точке A — через s_2. Хорды B_1C_1 и B_1A этих окружностей отсекают от них дуги одинаковой угловой величины. В самом деле, половины этих дуг в обоих случаях равны $\angle B_1AC_1$: для окружности s_1 это вписанный угол, а для s_2 — угол между касательной и хордой.

Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке B_1, переводящую C_1 в A и C в A_1: треугольники B_1C_1A и B_1CA_1 подобны (и подобны треугольнику BAC). Окружность s_1 перейдет в s_2, ибо друг в друга переходят хорды B_1C_1 и B_1A, отсекающие равные дуги. Поскольку точка C переходит в A_1, секущая CC_1 окружности s_1 переходит в секущую A_1A окружности s_2, а касательная CQ к окружности s_1 — в касательную из точки A_1 к s_2. Тем самым, углы между секущей и касательной в обоих случаях равны. Осталось заметить, что угол между CC_1 и CQ равен углу между A_1A и A_1Q: эти вписанные углы опираются на одну дугу HQ в окружности с диаметром CH.

6. Найдите все пары ненулевых (не обязательно положительных) рациональных чисел x, y, обладающие следующим свойством: любое положительное рациональное число можно представить в виде $\{rx\}/\{ry\}$ с положительным рациональным r.

Ответ: подходят все пары, в которых $xy < 0$. Разобьем плоскость на единичные квадраты линиями *целочисленной решетки. Проведем прямую ℓ через начало координат O и точку (x, y). Поскольку $x, y \in \mathbb{Q}$, она имеет рациональный угловой коэффициент и проходит через какой-то узел решетки. Точка вида (rx, ry) — это любая рациональная точка этой прямой. Проведем прямую через такую точку и левый-нижний угол той клетки, в которую попала эта точка. Угловой коэффициент этой прямой равен как раз $\{rx\}/\{ry\}$.*

Совместим между собой все единичные квадраты, в которых есть точки ℓ. В полученном квадрате ℓ отобразится конечным количество отрезков, параллельных исходной прямой.

Предположим, что x и y одного знака. Тогда полученные отрезки имеют положительный положительный угловой коэффициент. Один из них выходит из левого-нижнего узла квадрата. Ясно, что из этого узла можно провести луч с положительным рациональным коэффициентом λ, который пересечет верхнюю или нижнюю сторону квадрата, не встретив по дороге точек ни одного из наших отрезков. Это число λ нельзя представить в нужном нам виде.

Пусть, ноборот, числа x и y разного знака. Тогда наши отрезки имеют отрицательный угловой коэффициент. Один из них выходит из левого-верхнего узла квадрата. Несложно понять, что один из этих отрезков соединяет точку на левой стороне квдарата с точкой на его нижней стороне. На рациональных точках этого отрезка реализуются все возможные положительные рациональные угловые коэффициенты!

7. Есть $2n$ карточек, на каждой написано число от 1 до n (каждое — ровно на двух карточках). Карточки лежат на столе числами вниз. Набор из n карточек называется хорошим, если на них каждое число встречается по одному разу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может указать 80 наборов по n карточек, из которых хотя бы один заведомо окажется хорошим. При каком наибольшем n слова барона могут быть правдой?

Ответ: $n = 7$. Приведем алгоритм, как на $2n$ карточках можно указать 2^{n-1} наборов, один из которых подходит. (В нашем случае это $2^6 = 64 < 80$ наборов.) Представим себе, что одинаковые карточки соединены (невидимыми нам пока) красными ребрами. Разобьем карточки на пары как попало синими ребрами. Красно-синий граф — несколько циклов, и нас устроит любой набор вида "карточки через одну в каждом цикле". Любой такой набор обладает очевидным свойством: на каждом синем ребре выбрана ровно одна вершина. Поэтому, перебрав все 2^n наборов с таким свойством, мы заведомо попадем в нужную. Кроме того, все такие наборы разбиваются на пары противоположных (и в каждой паре либо оба набора подходят, либо оба нет), поэтому достаточно перебрать 2^{n-1} наборов.

Предположим теперь, что для 16 карточек указаны 80 наборов по 8 карточек. Докажем, что можно написать числа на карточках так, чтобы ни один из этих наборов не подходил.

Для каждого набора отметим все 8^2 пар карточек, в которых одна карточка попала в набор, а другая — нет; в итоге будет отмечено $80 \cdot 8^2$ пар. Всего имеется $16 \cdot 15/2$ пар, поэтому какая-то пара будет отмечена не более $80 \cdot 8^2/(16 \cdot 15/2) = (8/15) \cdot 80$ раз. Следовательно, эта пара "разбивается" не более чем 42 наборами. Напишем на этой паре карточек число 1. Все наборы, которые содержат обе эти карточки, или не содержат ни одну из них, уже забракованы. Далее рассматриваются лишь оставшиеся $a \leqslant 42$ набора, которые потенциально могут подойти.

Каждый из них содержит ровно 7 из оставшихся 14 карточек. Аналогично предыдущему, какая-то пара из них будет "разбиваться" не более чем $[(7/13) \cdot a] \leqslant [7/13] \cdot 42] = 22$ наборами. Напишем на этой паре число 2 и тем самым забракуем вссе наборы, кроме не более чем 22.

Продолжаем так же далее, в итоге оставим 4 свободные карточки и один набор из двух карточек. Напишем на карточках этого набора числа 7, а на двух оставшихся — числа 8; этот набор тоже окажется забракованным.