10 класс.

1. Можно ли на параболе $y = x^2$ отметить точки A, B, C, D, а на параболе $y = 2x^2$ — точки E, F, G, H так, чтобы выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$ оказались равными?

Ответ: да. Достаточно расположить эти параболы на плоскости так, чтобы они пересекались в четырех точках.

2. Пусть $p(n)$ — количество разбиений числа n в сумму натуральных слагаемых без учёта их порядка (например, $p(4) = 5$, поскольку $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$); $a(n)$ — количество разбиений числа n, в которых наименьшее слагаемое повторяется хотя бы два раза (например, $a(4) = 3$: подходят разбиения $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ и $1 + 1 + 1 + 1$). Докажите, что $a(n) = 2p(n) - p(n + 1)$.

Распределим все разбиения числа $n + 1$ на две группы: соержащие 1 и не содержащие. Количество разбиений в первой группе равно $p(n)$, а во второй — $p(n + 1) - p(n)$. Каждому разбиению второй группы сопоставим разбиение числа n, уменьшив наименьшее число на 1. При этом мы получим по одному разу в точности все те разбиения n, в которых наименьшее число единственно. Таким образом, $p(n+1)-p(n) = p(n) - a(n)$, что и требовалось.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle DIC$.

Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке A, переводящую $B \mapsto D$. Ясно, что при ней $H \mapsto C$. Пусть $I \mapsto P$. Тогда $\angle APD = \angle AIB = 90^\circ + \angle C/2$. С другой стороны, $\triangle AIP \sim \triangle AHC$ и $\angle API = \angle C$. Поэтому $\angle IPD = \angle APD - \angle API = 90^\circ - \angle C/2 = \angle ICD$. Следовательно четырехугольник $IPCD$ вписанный и $\angle DIC = \angle DPC$. Который, в свою очередь, равен $\angle DIH$ так как получается из него поворотной гомотетией.

4. Есть две кучки камней: 444 камня в одной кучке и 999 в другой. Саша и Федя играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Саша. Пусть перед ходом игрока кучи содержат a и b камней, причем $a \geqslant b$. Тогда своим ходом игроку разрешается взять из кучи с a камнями любое количество камней от 1 до b. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: первый. Предположим, что позиция $a > b$ является проигрышной. Тогда все позиции $(a - k, b)$ при $k = 1, \ldots, b$ выигрышные. Но раз $a - 1 \geqslant b$ — выгрышная, то из неё можно получитьа какую-то проигрышную, и ей может быть лишь позиция $(a-b-1, b)$. Такими процедурами можно получить проигрышные позиции: $(999, 444) \to (554, 444) \to (444, 109) \to (334, 109) \to (224, 109) \to (114, 109) \to (109, 4) \to (4, 4)$. Но $(4, 4)$ — выигрышная (можно походить в $(4, 0)$). Следовательно, позиция $(999, 444)$ тоже выигрышная.

5. Пусть $n > 2$ — натуральное число, $1 = a_1 < \ldots < a_k = n - 1$ — все числа от 1 до n, взаимно простые с n. Обозначим через $f(n)$ наибольший общий делитель чисел $a_1^3 - 1, \ldots, a_k^3 - 1$. Какие значения может принимать функция $f(n)$?

Ответ: $1, 2, 7, 26, 124$ (достигается при $n = 5, 10, 3, 4, 6$ соответственно). Случаи $n \leqslant 7$ разбирается непосредственно, далее считаем, что $n > 7$. Называем числа вида $a_i^3 - 1$ особыми.

Пусть $n > 7$ нечётно. Тогда среди особых чисел есть как $2^3 - 1 = 7$, так и либо $7^3 - 1$ (если n не кратно 7), либо $(n-2)^3-1$ (если n кратно 7). В обоих случаях получаем, что нашлись два взаимно простых особых числа, так что $f(n) = 1$.

Пусть теперь $n = 2^k b$, где b нечётно и $k \geqslant 1$. Тогда все особые числа чётны. Если $b = 1$, то $k \geqslant 3$, среди особых чисел есть $3^3 - 1 = 26$ и $5^3 - 1 = 124$, откуда $f(n) = 2$. Если $b = 3$, то $k \geqslant 2$, и среди особых чисел есть $5^3 - 1 = 124 = 4 \cdot 31$ и $7^3 - 1 = 342 = 2 \cdot 9 \cdot 19$. Опять же получаем $f(n) = 2$. Наконец, пусть $b \geqslant 5$. Тогда среди особых чисел есть числа $(b - 4)^3 - 1$, $(b - 2)^3 - 1$, $(b + 2)^3 - 1$, $(b + 4)^3 - 1$. Значит, $f(n)$ делит $(b + 4)^3 + (b - 4)^3 - (b + 2)^3 - (b - 2)^3 = 72b$. Хотя бы одно из чисел $(b - 2)^3 - 1$ и $(b - 4)^3 - 1$ не кратно 3 и хотя бы одно из них не кратно 4. Таким образом, если $f(n) \neq 2$, то $f(n)$ должно иметь общий простой делитель p с числом b. Поскольку $(b - 2)^3 - 1$ кратно p, получаем $p = 7$ и b кратно 7. Но тогда особое число $(n - 1)^3 - 1$ не кратно 7 — противоречие.

6. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На касательной в точке C к описанной окружности треугольника BMC отмечена точка D так, что $\angle CBD = 90^\circ$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке E. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BDE лежит на прямой AC.

См. решение задачи 9.6.

7. Питерский бизнес-клуб «Эльдорадо» был основан много лет назад знаменитым миллионером Пафнутием Копейко, который в начале был его единственным членом. Потом клуб только расширялся, но по правилам каждый новый эльдорадовец должен быть личным другом ровно одного из старых членов клуба. Бизнесмена называют *неудачником*, если его состояние не превосходит среднего арифметического состояний

всех его друзей в клубе, увеличенного на 1 биткоин. Сегодня оказалось, что в клубе $n + 1$ членов, все они неудачники, а сам Пафнутий вообще полностью разорен. Докажите, что состояние любого члена клуба не превосходит n^2 биткоинов.

Переведем задачу на язык графов: на дереве с $n + 1$ *вершинами расставлены числа так, что каждое не превосходит среднего арифметического соседей плюс 1. При этом среди чисел есть ноль. Докажите, что все числа не превосходят* n^2*. Ранжируем дерево с корнем в вершине с нулёмю и ориентируем все рёбра от корня. На каждом ребре напишем разность числа на конце и числа в начале ребра. Нам достаточно доказать, что сумма всех чисел на любом ориентированном пути из* k *ребер не превосходит* k^2*.*

Условие задачи легко переписать так: число на любой стрелке ab *превосходит сумму чисел на стрелках, выходящих из* b*, не больше чем на* $\deg(b)$*. В частности, числа на висячих стрелках не превосходят* 1*. По индукции легко понять, что число на стрелке, на конце которой висит поддерево размера* k*, не превосходит* $2k - 1$*. Действительно, пусть из этого конца выходит* d *стрелок, ведущих в деревья размером* s_1*, ...,* s_d*, сумма* s_i *равна* $k - 1$*. По предположению индукции, числа на этих на этих стрелках не превосходят* $2s_i - 1$*, их сумма не больше чем* $2(k - 1) - d$*. И по условию число на исходной стрелке не больше чем* $2(k - 1) - d + (d + 1) = 2k - 1$*.*

Теперь на любом ориентированном пути из k *ребер сумма чисел не превосходит* $1+3+\cdots+(2k-1) = k^2$*.*