9 класс.

1. На окружности поставлена 2021 точка. Костя отмечает точку, потом отмечает соседнюю справа точку, потом он отмечает точку справа через одну от только что отмеченной, потом — точку справа через две от только что отмеченной и т. д. На каком ходу впервые появится точка, отмеченная дважды?

Ответ: на 67-м ходу. Речь идёт о том, при каком наименьшем натуральном b может оказаться, что $(a+1)+(a+2)+\cdots+(b-1)+b$ кратно $2021 = 43\cdot 47$. Эта сумма равна $b(b+1)/2 - a(a+1)/2 = (b-a)(b+a+1)/2$ и несложно убедиться, что наименьшее $b = (b-a)/2 + (b+a)/2$ достигается на разложении $(66-19)(66+19+1)/2 = 47\cdot 86/2 = 47\cdot 43$. При этом $b = 66$, т.е. это произошло на 67-м ходу.

2. У Миши есть шахматная доска 100×100 и мешок со 199 ладьями. За один ход можно либо поставить одну ладью из мешка на левую нижнюю клетку, либо снять две ладьи, стоящие на одной клетке, одну из них поставить на клетку, соседнюю сверху или справа, а другую убрать в мешок. Миша хочет расставить на доске 100 не бьющих друг друга ладей. Любую ли такую расстановку он сможет получить?

Ответ да, любую. По индукции легко установить, что для постановки ладьи на клетку (x, y) (если считать, что левый нижний угол имеет координаты $(1,1)$) требуется запас из $x+y-1$ ладей. В задуманной Мишей расстановке ладей есть клетка $(100, y_{100})$ в правом столбце — чтобы поставить туда ладью, потребуется не более $100+y_{100}-1 \leqslant 199$ ладей. После этого для постановки ладьи в клетку $(99, y_{99})$ потребуется не более $99+y_{99}-1 \leqslant 198$ ладей, и они у Миши есть, даже учитывая, что одна ладья уже стоит на своём месте. И так далее, двигаясь справа налево, можно расставить все ладьи.

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 3\angle B$. На стороне AB отмечена точка C_1, а на стороне BC — точка A_1 так, что $AA_1 = AC = CC_1$. Докажите, что $3A_1C_1 > BD$.

Пусть точка A_2 симметрична точке A_1 относительно прямой AB, а точка C_2 симметрична точке C_1 относительно прямой BC. Из подсчета углов легко видеть, что обе эти точки попали на описанную окружность исходного четырехгольника. При этом $C_2A_1 = A_1C_1 = C_1A_2$ и $3A_1C_1 = C_2A_1 + A_1C_1 + C_1A_2 > A_2C_2$. Наконец, хорды A_2C_2 и BD равны, т.к. на них опираются одинаковые вписанные углы $\angle BAD = 3\angle ABC = \angle A_2BC_2$.

4. На плоскости отмечено n точек с разными абсциссами. Через каждую пару точек провели <u>параболу</u> — график квадратного трехчлена с единичным старшим коэффициентом. Парабола называется хорошей, если ни на ней, ни выше неё нет отмеченных точек, кроме тех двух, через которые она проведена. Какое наибольшее количество хороших парабол могло получиться?

Ответ: $n-1$ парабол. Пример: параболы, проходящие через n точек на оси OX. Оценка: соединим две отмеченные точки ребром, если парабола, проведенная через них, является хорошей. Предположим, что через данную точку A проходят две хорошие параболы. Правее точки A одна из парабол лежит выше другой, поэтому не может оказаться, что вторые отмеченные точки на каждой из двух парабол находятся правее A. Таким образом, из каждой точки может выходит максимум два ребра — одно направо, и одно (по аналогичным причинам) налево. Кроме того, из крайней левой и крайней правой точки исходит максимум одно ребро. Поэтому всего есть не более $n-1$ ребер, т.е. не более $n-1$ хороших парабол.

5. Равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой основание AD вдвое больше боковой стороны AB, вписана в окружность ω. Точки E и F выбраны на окружности ω так, что $AC \parallel DE$ и $BD \parallel AF$. Отрезок BE пересекает отрезки AC и AF в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BCX и EFY касаются.

Поскольку хорды AC и ED параллельны, $AE = CD$. Аналогично, $DF = AB$, и таким образом, $ADFE$ — также равнобедренная трапеция, у которой основание AD вдвое больше боковой стороны. Отметим середину M отрезка AD. Подсчет вписанных углов показывает, что окружность BCX проходит через точку M, а значит, касается AD в этой точке. Аналогичное верно и про окружность EFY. Следовательно, эти две окружности касатся в точке M.

6. В школе 450 учеников. Каждый из них имеет не меньше 100 друзей среди остальных, и среди любых 200 учеников всегда найдутся двое друзей. Докажите, что можно отправить в байдарочный поход 302 ученика так, чтобы в каждой из 151 двухместной байдарки оказались друзья.

Предположим противное. Выберем в данном графе паросочетание A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, A_nB_n самого большого размера, $n \leqslant 150$. Оставшиеся вершины C_1, C_2, $\ldots$, C_{450-2n} попарно несмежны. Кроме того, если для некоторого k существуют ребра A_kC_i и B_kC_j, то $i = j$, иначе можно было бы увеличить паросочетание, заменив ребро A_kB_k на ребра A_kC_i и B_kC_j.

Разобъем все ребра паросочетания на две группы — те, из концов которых ведут хотя бы три ребра в множество $C = \{C_i\}$, и те, из концов которых ведет не более двух ребер. Из доказанного следует, что если из концов одного ребра паросочетания ведет хотя бы 3 ребра в C, то все эти ребра идут из одного и того же конца этого ребра. Следовательно, можно считать, что вершины $A_1, \ldots, A_\ell$ имеют хотя бы по три смежных в C, вершины B_1, $\ldots$, B_ℓ несмежны с C, а для любого $k > \ell$ из вершин A_k и B_k суммарно ведет не более двух ребер в C.

Предположим, что при $i, j \leqslant \ell$ вершины B_i и B_j смежны друг с другом. Вершины A_i и A_j имеют хотя бы по три соседа в C, поэтому можно выбрать $x \neq y$ такие, что A_i смежна с C_x и A_j смежна с C_y. Но тогда мы можем заменить ребра A_iB_i, A_jB_j на ребра A_iC_x, B_iB_j, A_jC_y и увеличить паросочетние. Таким образом, все вершины B_1, $\ldots$, B_ℓ, C_1, $\ldots$, C_{450-2n} попарно несмежны. Тогда из условия следует, что $\ell + 450 - 2n < 200$. Поскольку $n \leqslant 150$, $\ell < 50$.

Посчитаем ребра, исходящие из вершин множества C в вершины паросочетания. С одной стороны, вершины из C попарно несмежны, поэтому таких ребер не менее $(450 - 2n) \cdot 100$. С другой стороны, из каждой вершины A_1, $\ldots$, A_ℓ идет не более $450 - 2n$ ребер в C, вершины B_1, $\ldots$, B_ℓ несмежны с C, а из остальных вершин паросочетания выходит не более $2 \cdot (n - \ell)$ ребер в C (не более двух из концов каждого ребра). Итого, не более $\ell \cdot (450 - 2n) + 2 \cdot (n - \ell)$. Следовательно, $\ell \cdot (450 - 2n) + 2 \cdot (n - \ell) \geqslant (450 - 2n) \cdot 100$, однако $\ell < 50$, $n - \ell < 150$, а $450 - 2n \geqslant 150$. Противоречие.

7. Дано натуральное число n. Для каждого простого числа p из промежутка $[n, n^4]$ посчитали число $\frac{1}{p}$, и все полученные числа сложили. Докажите, что их сумма меньше 4.

Для каждого простого p из $[n, n^4]$ отметим все числа от 1 до n^4, кратные p — таких чисел ровно $[n^4/p]$ штук. Ясно, что любое число отмечено не более чем три раза, поэтому $3n^4 \geqslant \sum [n^4/p] > \sum (n^4/p - 1) > n^4 \sum 1/p - n^4$, откуда и следует нужное неравенство.