8 класс.

1. Существует ли набор из 2021 различных натуральных чисел, обладающий следующим свойством: если выбрать из них любое число a, остальные 2020 чисел можно разбить на пары так, что a делится на разность чисел в каждой паре.

Да. Подойдут, например, числа от 1 до 2021.

На сторону AB остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, и на отрезке AH отмечена точка D так, что $AD = BH$. Докажите, что расстояние между серединами отрезков BH и CD вдвое меньше AC.

Отметим точки M, N, K — середины BH, CD, AD соответственно. В прямоугольном треугольнике CHD $HN = ND$, т.е. N лежит на серпере к HD, а значит и на серпере к MK. Поэтому $MN = NK = AC/2$.

3. Сизиф таскает камни на гору по одному камню в день. Первый и второй камень весят по 1 кг, а вес каждого следующего камня равен либо сумме, либо модулю разности весов двух предыдущих камней (каждый раз на выбор Сизифа, однако камней нулевого веса не бывает). Зевс назвал Сизифу два взаимно простых натуральных числа A и B, и разрешил ему уйти на заслуженный отдых, если однажды тот отнесет на гору камень веса A, а ровно через год (спустя 365 дней) после этого — камень веса B. Докажите, что Сизиф сможет действовать так, чтобы когда-нибудь уйти на заслуженный отдых.

Представим для начала, что A и $A+B$ использовались подряд, и начнем отматывать ситуацию назад во времени, каждый раз вычитая из большего веса меньший. Так мы за конечное число шагов придем к ситуации $1, 1$, поскольку веса соседних камней при обратных операциях остаются взаимно простыми. Значит, Сизиф может добиться того, чтобы A и $A+B$ использовались в последовательные дни. Далее он будет чередовать камни A, $A+B$, B, A, $A+B$, B, $\ldots$, и на 366 день цикла придется камень B, что и требовалось.

4. На берегу реки стоят 10 шейхов, каждый вместе с гаремом из 100 жён. Также у берега стоит n-местная яхта. По закону женщина не должна находиться на одном берегу, на яхте, или даже на пересадке с мужчиной, если рядом нет её мужа. При каком наименьшем n все шейхи с женами смогут переправиться на другой берег, не нарушив закон?

Ответ: 10. Пример: сначала потихоньку переезжают все 1000 жен, затем одна возращается и уезжают 10 шейхов. Наконец, еще одна возвращается и забирает первую. Оценка: пусть мест не больше 9. Рассмотрим момент, когда на другом берегу появился первый шейх — или сразу несколько, но не все, ибо сразу все не могли переехать. Тогда вместе с ними там находятся их гаремы, а с оставшимися шейхами — их гаремы. Но тогда для обратного рейса есть лишь один вариант: возвращаются сразу все имеющиеся на втором берегу шейхи, и они опятьскапливаются на первом берегу. Так никогда все шейхи оттуда и не уплывут.

5. Найдите наименьшее значение выражения $\left[\frac{8(a+b)}{c}\right] + \left[\frac{8(a+c)}{b}\right] + \left[\frac{8(b+c)}{a}\right]$, где a, b и c — произвольные натуральные числа.

Ответ: 46. *См. решение задачи 7.6.*

6. Назовем множество натуральных чисел, не превосходящих 10^{100}, *консервативным*, если ни один из его элементов не делит произведение всех остальных его элементов, и *прогрессивным*, если вместе с любым

своим элементом оно содержит все кратные ему числа, не превосходящие 10^{100}. Каких множеств больше: прогрессивных или консервативных?

Ответ: прогрессивных больше. Сопоставим консервативному множеству A множество $P(A)$ всех чисел, не превосходящих 10^{100}, кратных хотя бы одному из чисел в A. Ясно, что $P(A)$ прогрессивно. Несложно установить, что отображение P инъективно, а значит, консервативных множеств не больше, чем прогрессивных. Чтобы доказать строгое неравенство, нужно предъявить множество, являющееся прогрессивным, но не имеющее вид $P(X)$ ни для какого X. В качестве такого множества подойдет множество чисел, кратных 4, 6 или 9.

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точка A' такова, что $\angle ABA' = \angle ADA' = 90°$. Аналогично определяются точки B', C' и D'. При этом A' и C' лежат внутри $ABCD$, а B и D — внутри выпуклого четырехугольника $A'B'C'D'$. Докажите, что площади четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны.

Заметим, что $AB' \| A'B$, $BC' \| B'C$, $CD' \| C'D$, $DA' \| D'A$. Поэтому $S(ABCD) = S(CBC') + S(CDC') + S(ABA') + S(ADA') - S(A'BC'D) = S(B'BC') + S(D'DC') + S(B'BA') + S(D'DA') - S(A'BC'D) = S(A'B'C'D')$.