**7 класс.**

1. Костя выписал в некотором порядке все дроби с числителем 2021 и знаменателями от 1 до 2020. Оказалось, что сумма первой и второй дроби равна их произведению, сумма третьей и четвертой равна их произведению и т. д., сумма 2017-й и 2018-й дроби равна их произведению. Докажите, что сумма 2019-й и 2020-й дроби тоже равна их произведению.

*Заметим, что* $\frac{2021}{x}+\frac{2021}{y}=\frac{2021}{x}\cdot\frac{2021}{y}$ *равносильно тому, что* $x+y=2021$. *Числа от 1 до 2020 разбиваются на 1010 пар, в сумме дающих 2021. Из условия задачи следует, что знаменатели первых 2018 дробей — числа из 1009 таких пар. Тогда знаменатели последних двух дробей образуют 1010-ю пару, а потому сумма последних двух дробей равна их произведению, что и требовалось.*

2. В треугольнике $ABC$ проведена медиана $AK$. На стороне $AC$ отмечена точка $N$ так, что $\angle AKN = 90°$. Докажите, что на плоскости найдется точка $L$ такая, что $AB = AL$, $BK = KL$ и $NL = NC$.

*Заметим, что* $\angle AKB + \angle CKN = 180° - \angle AKN = 90°$. *Поэтому можно разделить лучом угол* $AKN$ *на углы, равные* $AKB$ *и* $CKN$. *Отметим на таком луче точку* $L$ *так, что* $KL = KB = KC$. *Тогда по первому признаку равны треугольники* $ABK$ *и* $ALK$, *а также треугольники* $CKN$ *и* $LKN$. *Значит,* $AB = AL$ *и* $NL = NC$, *что и требовалось.*

3. Дана прямоугольная таблица $14 \times n$. В её левой верхней клетке стоит фишка. Саша и Оля по очереди (начинает Саша) передвигают фишку на одну клетку вправо или вниз. Будем говорить, что произошел поворот, если направление хода игрока отличалось от направления сделанного перед этим хода соперника. Если к моменту попадания фишки в правый нижний угол произошло чётное число поворотов, то побеждает Саша, иначе — Оля. При каких значениях $n$ Оля может обеспечить себе победу независимо от действий Саши?

*Ответ: 13, 14, 15. Наличие чётного числа поворотов равносильно тому, что направления первого и последнего ходов совпадали. Если* $n > 15$, *то Саша может первым ходом походить вниз, а далее всё время ходить вправо. Аналогично в случае* $n < 13$: *Саша может первым ходом походить вправо, а затем ходить вниз. Легко видеть, что при этом он выиграет.*

*В остальных случаях Оля будет, пока это возможно, повторять первый ход Саши. Пусть Саша походил, например, вниз. Тогда поскольку количество строк не больше, чем количество столбцов плюс один, то когда фишка будет передвинута в нижнюю строку, она еще не будет лежать в первом столбце. Следовательно, направление последнего хода будет отлично от направления первого и Оля победит.*

4. В ряд выписано 300 натуральных чисел. Каждое число, начиная с третьего, равно произведению двух предыдущих. Сколько точных квадратов может быть среди этих чисел? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

*Ответ:* 0, 100 *или* 300. *Если после числа* $a$ *выписано число* $b$, *то за ними идут числа* $ab$ *и* $ab^2$. *Число* $ab^2$ *— точный квадрат в том и только в том случае, когда* $a$ *— точный квадрат. Среди первых трёх чисел квадратами могут быть все три, одно или ни одного (примеры всех трёх ситуаций тривиальны). Отсюда сразу следует ответ.*

5. На плоскости даны 5000 точек, никакие две из которых не лежат на одной вертикальной или горизонтальной прямой. Сережа хочет так расставить в этих точках числа 1 и $-1$, чтобы сумма всех чисел, расположенных слева от любой вертикальной прямой, была равна 0, 1 или $-1$, и сумма всех чисел, расположенных сверху от любой горизонтальной прямой, также была равна 0, 1 или $-1$. Верно ли, что при любом расположении точек он сможет этого добиться?

*Рассмотрим граф* $G$ *в котором вершины — наши точки, а рёбра двух цветов заданы следующим образом. Упорядочим точки по возрастанию их координат по оси абсцисс и для всех* $1 \leqslant k \leqslant 2500$ *соединим красными рёбрами вершины с номерами* $2k-1$ *и* $2k$. *Аналогично для оси ординат соединим вершины рёбрами синего цвета. Теперь чтобы условие задачи выполнялось достаточно (и необходимо) чтобы в вершинах, соединённых ребром (любого цвета), стояли разные числа. Поскольку в графе* $G$ *из любой вершины ведёт одно* *красное и одно синее ребро, он есть объединение чётных циклов. А значит, двудолен. Остается расставить в точки из одной доли единицы, а в точки другой доли — минус единицы.*

6. Найдите наименьшее значение выражения $\left[\frac{7(a+b)}{c}\right]+\left[\frac{7(a+c)}{b}\right]+\left[\frac{7(b+c)}{a}\right]$, где $a$, $b$ и $c$ — произвольные натуральные числа.

*Ответ: 40. Оценка: сумма дробей под целыми частями не меньше чем* $14\cdot 3=42$ *(складываем три неравенства вида* $7(a/b+b/a)\geqslant 14$*, а каждая целая часть больше дроби, уменьшенной на 1. Значит искомая величина больше* $42-3=39$*, т.е. не меньше чем* $40$*. Пример:* 99, 100, 100.

7. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлись такие точки $E$ и $F$, что треугольники $ABE$ и $CDF$ — равносторонние. Докажите, что сумма периметров треугольников $ABF$ и $CDE$ не меньше, чем периметр четырехугольника $ABCD$.

*Построим вовнутрь правильный треугольник* $BCX$*. Поскольку* $\angle ABE=60^\circ=\angle CBX$*, то* $\angle ABX=\angle CBE$*. Значит, треугольники* $ABX$ *и* $BCE$ *равны по двум сторонам и углу между ними, а потому* $AX=CE$*. Аналогично* $DX=BF$*. Таким образом,* $BF+CE=AX+DX\geqslant AD$*. Рассуждая аналогично имеем, что* $AF+DE\geqslant BC$*. Сложив два полученных неравенства и добавив к обеим частям* $AB+CD$*, получаем требуемое.*