

Условия и решения второго тура.

6 класс.

1. Саша задумал три натуральных числа. Он выписал на доску все общие делители первых двух чисел, затем выписал все общие делители второго и третьего, и наконец выписал все общие делители первого и третьего. Всего оказалось выписано 18 чисел. Четыре из них — 3, 3, 4, 4. Найдите остальные 14 выписанных чисел.

Ответ: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 6, 6, 6, 12, 12, 12. Из условия следует, что все три задуманных числа кратны 3 и 4, а значит, кратны 12. Это уже даёт по 6 общих делителей у каждой пары чисел, поэтому других общих делителей нет.

2. В зале кинотеатра кресла стоят в несколько рядов (ряды могут различаться по количеству кресел). Общая вместимость зала — 1000 зрителей. На сеанс пришло 515 зрителей, и их удалось рассадить так, что никакие два зрителя не оказались в одном ряду на соседних креслах. Докажите, что в каком-то ряду не больше 33 кресел.

Если в ряду n мест, то зрители могут занять на нем не более $\frac{n}{2}$ мест, если n — четное, и не более $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ мест, если n — нечетное. Просуммировав по всем рядам, получим не более $\frac{1000}{2} + \frac{k}{2}$ мест, где k — количество рядов с нечетным числом мест. Следовательно, $k \geq 30$, то есть в зале есть не менее 30 рядов с нечетным числом мест. Если во всех этих рядах больше 33 мест, то суммарно мест не меньше $30 \cdot 35 = 1050$. Противоречие.

3. Шахматный конь обошел доску 8×8 , побывав на каждой клетке по одному разу. Клетки пронумеровали вдоль маршрута коня числами от 1 до 64. После этого на клетку 1 пришла собака, и стала искать коня по следующему правилу. Оказавшись на клетке с номером n , она обнюхивает соседние по стороне клетки и находит среди них клетку с наибольшим номером. Собака переходит на эту клетку, если ее номер больше n , и остается на месте, если номер меньше n . Известно, что собака нашла коня, то есть пришла на 64-ю клетку. Докажите, что она переходила с одной клетки на другую не более 19 раз.

Покрасим доску в шахматную раскраску. Легко понять, что за один ход собака собака увеличивает номер своей клетки на нечетное число, не меньшее 3. Кроме того, первым своим ходом собака увеличит номер клетки не менее чем на 5. Также заметим, что раз собака в итоге изменила номер клетки на 63, то всего она сделала нечетное число ходов. Если она сделала больше 19 ходов, тогда она сделала не менее 21 хода и увеличила свой номер хотя бы на $5 + 20 \cdot 3 = 65$, что невозможно.

4. Дано натуральное число n . На доске выписаны все положительные несократимые дроби со знаменателем n , меньшие 10. Докажите, что их сумма не равна 123450.

Все дроби несложно разбить на группы вида группы вида $\frac{r}{n}, \frac{n-r}{n}, \frac{n+r}{n}, \frac{2n-r}{n}, \dots, \frac{9n+r}{n}, \frac{10n-r}{n}$ с фиксированным r . В одной такой группе сумма равна $\frac{n}{n} + \frac{3n}{n} + \dots + \frac{19n}{n} = 100$, поэтому и вся сумма должна делиться на 100.

5. Оля с Димой играют в игру. Сначала Оля выкладывает в ряд в некотором порядке $2n$ карточек с числами от 1 до $2n$ числами вверх. Затем они ходят по очереди, начиная с Димы. За один ход игрок забирает себе одну из крайних карт. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел Оля может собрать у себя вне зависимости от действий Димы?

Ответ: n чисел. Оля должна выложить карточки так: $1, n + 1, 2, n + 2, \dots, n - 1, 2n - 1, n, 2n$. Оля будет брать карточки с той же стороны, что и Дима. Тогда она возьмёт (слева) несколько чисел от $n + 1$ в большую сторону, и (справа) несколько чисел от n в меньшую сторону.

6. В большой таблице отмечено 2020 клеток (в каждом столбце и каждой строке отмечено не более одной клетки), при этом в верхней строке и в левом столбце отмеченных клеток нет. Сережа хочет покрасить эти клетки в красный и синий цвет так, чтобы справа от любого столбца таблицы количество красных клеток отличалось от количества синих не более чем на 1, и снизу от любой строки количество красных клеток отличалось от количества синих также не более чем на 1. Верно ли, что при любом расположении клеток Сережа сможет это сделать?

Ответ: верно. См.решение задачи 7.5.