11 класс.

1. Дано простое число p. Все натуральные числа от 1 до p выписаны в ряд в порядке возрастания. Найдите все p, для которых этот ряд можно разбить на несколько блоков подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел во всех блоках были одинаковы.

Ответ: $p = 3$. *Пусть* k *— количество блоков,* S *— сумма в каждом блоке. Поскольку* $p(p+1)/2 = kS$, *либо* k, *либо* S *делится на* p. *Ясно, что* $k < p$, *поэтому* S *кратно* p. *Пусть самая левая группа состоит из чисел от 1 до* m. *Тогда* $m(m+1)/2$ *кратно* p, *откуда* $m \geqslant p-1$, *т.е.* $m = p-1$. *Но это значит что сумма чисел от 1 до* $p-1$ *равна* p *что возможно лишь при* $p = 3$.

2. Клетки таблицы 100×100 окрашены в белый цвет. За один ход разрешается выбрать любые 99 клеток из одной строки или из одного столбца и перекрасить каждую из них в противоположный цвет — из белого в черный, а из черного в белый. За какое наименьшее количество ходов можно получить таблицу с шахматной раскраской клеток?

Ответ: за 100 ходов. Оценка: чтобы перекрасить каждую из клеток черной диагонали, требуется свой ход. Пример: перекрасим все строки с столбцы с нечетными номерами. При этом в k*-й строке и* k*-м столбце не будем перекрашивать их общу клетку. Легко видеть, что в результате получится шахматная раскраска доски (с белой диагональю из клеток вида* (k,k).

3. В пирамиде $SA_1A_2\dots A_n$ все боковые рёбра равны. Точка X_1 — середина дуги A_1A_2 описанной окружности треугольника SA_1A_2, точка X_2 — середина дуги A_2A_3 описанной окружности треугольника SA_2A_3 и т. д., точка X_n — середина дуги A_nA_1 описанной окружности треугольника SA_nA_1. Докажите, что описанные окружности треугольников $X_1A_2X_2$, $X_2A_3X_3$, $\dots$, $X_nA_1X_1$ пересекаются в одной точке.

Поскольку боковые ребра пирамиды равны, у неё существует описанная сфера. Пусть T *— точка на этой сфере, диаметрально противоположная точке* S. *Заметим, что отрезки* A_2X_1, A_2X_2 *и* A_2T *перпендикулярны ребру* SA_2, *т.е. лежат в одной плоскости. Одновременно точки* A_2, X_1, X_2 *и* T *лежат на описанной сфере. Следовательно, эти четыре точки лежат на одной окружности. Это значит, что окружность* $X_1A_2X_2$ *проходит через точку* T, *как и остальные аналогичные окружности.*

4. На доске написаны функции $F(x) = x^2 + \frac{12}{x^2}$, $G(x) = \sin(\pi x^2)$ и $H(x) = 1$. Если на доске уже написаны функции $f(x)$ и $g(x)$, то можно выписать на доску еще и функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, а также функцию $cf(x)$ для произвольного вещественного числа c. Может ли на доске появиться такая функция $h(x)$, что $|h(x) - x| < \frac{1}{3}$ при всех $x \in [1, 10]$?

Заметим, что $F(1) = F(\sqrt{12})$, $G(1) = G(\sqrt{12})$, $H(1) = H(\sqrt{12})$. *Следовательно, для любой функции* h, *которая появится на доске,* $h(1) = h(\sqrt{12})$. *Но если* $|h(1)-1| < 1/3$ *и* $|h(\sqrt{12}-\sqrt{12}| < 1/3$, *то* $|1-\sqrt{12}| < 2/3$, *что не верно.*

5. Дано натуральное число n. Для каждого простого числа p из промежутка $[n, n^2]$ посчитали число $\frac{1}{p}$, и все полученные числа сложили. Докажите, их сумма меньше 2.

Для каждого простого p *из* $[n, n^2]$ *отметим все числа от 1 до* n^2, *кратные* p *— таких чисел ровно* $[n^2/p]$ *штук. Ясно, что любое число отмечено не более одного раза, поэтому* $n^4 \geqslant \sum [n^2/p] > \sum (n^2/p - 1) > n^2 \sum 1/p - n^2$, *откуда и следует нужное неравенство.*

6. Точка M — середина основания AD трапеции $ABCD$, вписанной в окружность ω. Биссектриса угла ABD пересекает отрезок AM в точке K. Прямая CM вторично пересекает окружность ω в точке N. Из точки B проведены касательные BP и BQ к описанной окружности треугольника MKN. Докажите, что прямые BK, MN и PQ пересекаются в одной точке.

Луч BK *пересекает описанную окружность в середине* T *дуги* AD. *Заметим, что* $\angle BTN = \angle BCN = \angle AMN$, *поэтому окружность* MKN *проходит через точку* T. *Кроме того,* $\angle KMT$ *прямой, поэтому прямая* BT *содержит диаметр этой окружности. Пусть* O *и* r *— её центр и радиус. Точка пересечения* U *прямой* PQ *с диаметром обладает свойством* $OB \cdot OU = r^2$. *Поэтому для решения задачи нужно проверить, что точка пересечения* V *прямых* CN *и* BT *обладает тем же свойством:* $OB \cdot OV = r^2$. *Обозначим* $x = \angle AKB = \angle OKM = \angle OMK$ *и* $y = \angle KMB = \angle CMD = \angle VMK$. *Тогда* $\angle KBM = x - y = \angle VMO$. *Это означает, что треугольники* OMV *и* OBM *подобны и* $OB \cdot OV = OM^2 = r^2$, *что и требовалось.*

7. Квадрат разрезан на красные и синие прямоугольники. Сумма площадей красных прямоугольников равна сумме площадей синих. Для каждого синего прямоугольника запишем отношение длины его вертикальной стороны к длине горизонтальной, а для каждого красного прямоугольника — отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех записанных чисел.

Ответ: $1/2$. *Пример: два прямоугольника* $1/2 \times 1$.

Можно считать, что сторона исходного квадрата равна 1. Отношение сторон любого прямоугольника больше или равно его площади, поэтому каждая из двух сумм ("красная" и "синяя") не меньше $1/2$. *Осталось, доказать, что одна из этих двух сумм не меньше 2.*

Спроецируем синие прямоугольники на вертикальную сторону квадрата, а красные — на горизонтальную. В одном из двух случаев проекции покроют сторону целиком (иначе в квадрате найдётся точка, не покрытая ни одним из прямоугольников). Не умаляя общности, пусть это вертикальные проекции a_i *синих прямоугольников. Тогда* $\sum a_i \geqslant 1$.

Если b_i *— горизонтальные стороны синих прямоугольников, то* $\sum a_i b_i = 1/2$. *По неравенству КБШ,* $(\sum a_i/b_i)(\sum a_i b_i) \geqslant (\sum a_i)^2 \geqslant 1$, *откуда* $\sum a_i/b_i \geqslant 2$, *что и требовалось.*