10 класс.

1. Решите систему уравнений: $\sin^2 x + \cos^2 y = y^4$, $\sin^2 y + \cos^2 x = x^2$.

Ответ: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Поменяв, если нужно, знак у переменных, будем считать, что $x, y \geqslant 0$. *Сразу ясно, что* $x^4, y^4 \leqslant 2$, *поэтому* $x, y \leqslant \sqrt{2} < \pi/2$. *Сложив два исходных равенства, получим, что* $x^2 + y^4 = 2$, *откуда* $x \geqslant 1$, $y \leqslant 1$, *или наоборот. Ясно, что* $x = y = 1$ *является решением.*

Пусть $x > 1 > y$. *Тогда* $\sin x > \sin y$ *и* $\cos y > \cos x$. *Значит,* $y^4 > x^2$, *что противоречит предположению. Точно так же разбирается случай* $x < 1 < y$.

2. В ряд выписано 2021 простое натуральное число. Каждое, кроме крайних, отличается от одного из своих соседей на 12, а от другого — на 6. Докажите, что среди этих чисел есть равные.

Предположим, что все эти числа различны. среди них не более, чем одно число равно 5. *Возьмем в этом ряду два соседних числа с разностью* 6, *от которых на расстоянии* 10 *шагов в обе стороны не встретится ни число* 5, *ни конец ряда. Пусть это числа* a *и* $a+6$, *посмотрим на следующие несколько чисел с той стороны ряда, где число* $a+6$, *по модулю* 5. *Сами числа* a *и* $a+6$ *могут давать остатки* 1 *и* 2; 2 *и* 3; 3 *и* 4. *Эти случаи абсолютно аналогичны, рассмотрим первый из них. Следующее за* $a+6$ *число равно либо* $a-6$, *либо* $a+18$. *В первом случае оно кратно* 5, *противоречие. Значит, оно равно* $a+18$. *Следующее число равно либо* $a+24$, *либо* $a+12$. *В первом случае оно кратно* 5, *значит, оно равно* $a+12$. *Наконец, следующее число равно либо* $a+24$, *либо* a. *Первое кратно* 5, *а второе уже встречалось в этом ряду — противоречие.*

3. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 таковы, что $AA_1 \perp EB$, $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp BD$, $DD_1 \perp CE$, $EE_1 \perp DA$. Кроме того, $AE_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$, $CB_1 = CD_1$, $DC_1 = DE_1$. Докажите, что тогда $ED_1 = EA_1$.

Рассмотрим выражение $S = (EA_1^2 - BA_1^2) + (BC_1^2 - DC_1^2) + (DE_1^2 - AE_1^2) + (AB_1^2 - CB_1^2) + (CD_1^2 - ED_1^2)$. *Из данных равенств следует, что* $S = EA_1^2 - (BA_1^2 - BC_1^2) - (DC_1^2 - DE_1^2) - (AE_1^2 - AB_1^2) - (CB_1^2 - CD_1^2) - ED_1^2 =$

$EA_1^2-ED_1^2$. С другой стороны, из условия $AA_1 \perp EB$ следует, что $EA_1^2-BA_1^2=EA^2-BA^2$ и т.д. Заменяя так все скобки, получаем сумму $(EA^2-BA^2)+(BC^2-DC^2)+(DE^2-AE^2)+(AB^2-CB^2)+(CD^2-ED^2)=0$. Следовательно, $EA_1^2-ED_1^2=0$.

4. Штирлиц хочет послать в Центр шифровку, представляющую собой код из 100 символов «точка» или «тире». Полученная им накануне из Центра Инструкция о конспирации гласит:

— при передаче шифровки по радио ровно 49 символов следует заменить на противоположные;

— расположение «неверных» символов возлагается на передающую сторону и с Центром не обсуждается.

Докажите, что Штирлиц может послать свою шифровку 10 раз, подбирая при каждой передаче 49 символов так, чтобы Центр, получив эти 10 шифровок, имел возможность однозначно восстановить исходный код.

Пусть шифровки представляют собой последовательности из нулей и единиц. Ясно, что можно считать, что Штрилиц шифрует строку, состоящую из одних нулей.

Штирлиц разобьет двоичную строку на два блока по 49 бит в каждом и оставшиеся два бита. В шифровке C_1 единицы будут стоять в первом блоке, в строка C_2 — во втором блоке. Центр, увидев эти шифровки, обнаружит, что они различаются в 98 битах, а, значит, последние два бита верные в обеих шифровках. Если на $k-1$ шаге Центр уже вычислил a бит в первом блоке и b бит во втором блоке, то всего ему уже известно $a+b+2$ бита. Пусть для определенности $a \leqslant b$ (если $a>b$, то первый и второй блоки меняются местами). Тогда Штирлиц передаст шифровку C_k, в которой единицы будут стоять на этих $a+b+2$ позициях, а также каких-то $47-a-b$ позициях первого блока. Центр сравнит C_2 и C_k и обнаружит, что в них есть одинаковые неверные b бит, а также различающиеся $98-2b$ позиций ($47-b$ в первом блоке и $49-b$ во втором). Но такое возможно только, если на оставшихся позициях переданы верные биты. Следовательно, Центр теперь в дополнении к известным ранее a битам знает еще $b+2$ бита из первого блока и всего ему известно $a+b+2$ бита из первого блока. Выпишем далее пары чисел a и b, которые будут возникать после получения Центром очередной шифровки. После второй шифровки $a=b=0$, после третей $a=2$ и $b=0$, после четвертой $a=2$ и $b=4$, после пятой $a=8$ и $b=4$, после шестой $a=8$ и $b=14$, после седьмой $a=24$ и $b=14$, наконец, после восьмой шифровки $a=24$ и $b=40$. Следовательно, в этот момент Центр уже знает 66 бит из послания Штирлица. Тогда в девятой шифровке Штирлиц передаст 49 единиц в каких-то 49 позициях из уже известных Центру и тогда центр поймет, что остальные позиции правильные и узнает оставшуюся часть сообщения. Десятая шифровка Штирлицу даже и не пригодилась.

5. Вершины выпуклого 2550-угольника покрашены в черный и белый цвета так: чёрная, белая, две чёрные, две белые, три чёрные, три белые, ..., 50 чёрных, 50 белых. Даня разрезал его на четырёхугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек. Докажите, что найдётся четырёхугольник разрезания, в котором две соседние вершины чёрные, а две другие вершины — белые.

Для кадого четырехугольника разбиения вычислим количество его сторон с двумя черными концами, и все эти числа просуммируем. Легко видеть, что у четырехугольника нужного вида такая сторона одна, а для остальных окрасок их число четно. Если утверждение неверно, то сумма всех этих чисел четна. При этом все внуренние стороны учитывались два раза. На периметре же четырехугольника сторон нужного вида $1+2+\dots+49$ — нечетное число. Противоречие.

6. Прямая ℓ проходит через вершину C ромба $ABCD$ и пересекает продолжения его сторон AB и AD в точках X и Y соответственно. Прямые DX и BY вторично пересекают окружность, описанную около треугольника AXY, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PCQ, касается прямой ℓ.

Биссектриса AC угла DAB вторично пересекает описанную окружность треугольника AXY в середине T дуги XY. Поскольку $\angle BQT=\angle YQT=\angle XAT=\angle BCA$, четырехугольник $QBCT$ — вписанный. Аналогично, $TCDP$ — вписанный.

В силу симметрии относительно AC и вписанности $TCDP$ выполнено равенство $\angle ATB=\angle DTC=\angle DPC$. Далее, $\angle QCX=\angle BCX-\angle BCQ=\angle AYX-\angle BTQ$, $\angle AYX-\angle BTQ=\angle AYQ+\angle QYX-\angle BTQ=\angle ATQ-\angle BTQ+\angle QPX=\angle ATB+\angle QPX=\angle DPC+\angle QPX=\angle QPC$. Итого, $\angle QCX=\angle QPC$, из чего и следует нужное нам касание.

7. Коля нашёл несколько попарно взаимно простых натуральных чисел, каждое из которых меньше квадрата любого другого. Докажите, что сумма величин, обратных к Колиным числам, меньше 2.

Пусть меньшее из чисел равно n; тогда все Колины числа лежат в промежутке $[n,n^2]$. Для каждого Колиного числа a_i отметим все числа от 1 до n^2, кратные a_i — таких чисел ровно $[n^2/a_i]$ штук. Ясно, что любое число отмечено не более чем один раз, поэтому $n^2 \geqslant \sum [n^2/a_i] > \sum (n^2/a_i-1) > n^2\sum 1/a_i - n^2$, откуда и следует нужное неравенство.