Второй тур

9 класс

49. Какое наибольшее количество решений может иметь уравнение $\max\{a_1x+b_1,\ldots,a_{10}x+b_{10}\}=0$, если a_1, …, a_{10}, b_1, …, b_{10} — вещественные числа, причем все a_i не равны 0?

50. Назовем тройку натуральных чисел a, b, c *вызывающей интерес*, если $(a^2+1)(b^2+1)$ кратно c^2+1, но ни один из двух множителей сам не кратен c^2+1.

Дана вызывающая интерес тройка a, b, c. Докажите, что существуют натуральные числа u, v, для которых тройка u, v, c вызывает интерес и $uv<c^3$.

51. На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ с острым углом B отмечена точка E. Известно, что $\angle CAD=\angle ADC=\angle ABE=\angle DBE$. Докажите, что $BE+CE<AD$.

52. В таблице 25 столбцов и 300 строк, Костя покрасил все ее клетки в три цвета. Затем Леша, глядя на таблицу, для каждой строки называет один из трех цветов и отмечает в этой строке все клетки этого цвета. (Если в строке нет клеток указанного цвета, то он ничего в ней не отмечает.) После этого из таблицы вычеркивают все столбцы, которые содержат хотя бы одну отмеченную клетку. Костя хочет, чтобы в таблице осталось как можно меньше столбцов, а Леша хочет, чтобы как можно больше. Какое наибольшее число столбцов может гарантированно оставить Леша?

53. Точка I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC в точке X, а точка A' диаметрально противоположна точке A на описанной окружности этого треугольника. На отрезках I_AX, BA', CA' выбраны точки Y, Z, T соответственно таким образом, что $I_AY=BZ=CT=r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

54. На координатной плоскости отмечены точки: (1,1), (2,3), (4,5), (999,111). Если отмечена точка (a,b), то можно отметить также точки (b,a) и $(a-b,a+b)$; если отмечены точки (a,b) и (c,d), то можно отметить точку $(ad+bc,4ac-4bd)$. Удастся ли рано или поздно отметить точку на прямой $y=2x$?

55. В графе 400 вершин. Для любого ребра AB назовём *каракатицей* набор *всех* ребер, выходящих из вершин A и B (включая само ребро AB). На каждом ребре графа стоит число 1 или -1. Известно, что сумма чисел на ребрах любой каракатицы больше или равна 1. Докажите, что сумма чисел на всех ребрах графа не меньше чем -10000.