Второй тур

11 класс

63. Натуральное число назовём *гипотенузным*, если оно может быть представлено в виде суммы двух квадратов целых неотрицательных чисел. Докажите, что любое натуральное число, большее 10, является разностью двух гипотенузных.

64. Близорукая ладья бьет все клетки своей строки и своего столбца, до которых можно дойти не более чем за 60 шагов, шагая из клетки в соседнюю по стороне. Какое наибольшее число не бьющих друг друга близоруких ладей можно расставить в квадрате 100×100?

65. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает окружность, описанную около треугольника AIC, в точках D и E. Точка F на отрезке B_1C выбрана так, что $AB_1 = CF$. Докажите, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности.

66. Сумму

$$\frac{2}{3 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \ldots + \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2015}{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2019}$$

записали в виде десятичной дроби. Найдите первую цифру после запятой.

67. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_b проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром в точке O_c проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $B_1O_b + C_1O_c > \frac{BC}{4}$.

68. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_n(a_{n+1} + 1)$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что a_{a_n} делится на $(a_n)^n$ при $n \geqslant 100$.

69. N олигархов построили себе страну с N городами, каждый олигарх владеет ровно одним городом. Кроме того, каждый олигарх построил несколько дорог между городами: любая пара городов соединена максимум одной дорогой каждого из олигархов (между двумя городами может быть несколько дорог, принадлежащих разным олигархам). Суммарно было построено d дорог. Некоторые олигархи хотели бы создать корпорацию, объединив свои города и дороги, так чтобы при этом из любого города корпорации можно было доехать до любого другого ее города по дорогам этой корпорации, возможно, заезжая по дороге в города других олигархов. Но оказалось, что никакая группа, в которой меньше N олигархов, олигархов создать корпорацию не может! При каком наибольшем d это возможно?