9 класс

49. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (в частности, последняя цифра палиндрома совпадает с первой и потому не равна нулю). Квадраты двух различных натуральных чисел имеют по 1001 цифре. Докажите, что строго между этими квадратами на числовой прямой найдется палиндром. (*М. Иванов*)

50. В городе построено 2019 станций метро. Некоторые пары станций соединены тоннелями, причем от любой станции по тоннелям можно добраться до любой другой. Мэр распорядился организовать несколько линий метро: каждая линия должна включать в себя несколько различных станций, последовательно соединенных тоннелями (по одному и тому же тоннелю может проходить несколько линий). При этом каждая станция должна лежать хотя бы на одной линии. Для экономии средств следует сделать не более k линий.

Оказалось, что приказ мэра неосуществим. При каком наибольшем k это могло произойти? (*С. Берлов*)

51. Докажите, что расстояние между серединой стороны BC треугольника ABC и серединой дуги ABC его описанной окружности не меньше, чем $AB/2$. (*А. Кузнецов*)

52. Оля написала на карточках дроби вида $1/n$, где n — все возможные делители числа 6^{100} (включая единицу и само это число). Эти карточки она разложила в некотором порядке. После этого она записала на доску число на первой карточке, затем сумму чисел на первой и второй карточках, потом сумму чисел на первых трех карточках и т. д., наконец, сумму чисел на всех карточках. Каждую сумму Оля записывала на доску в виде несократимой дроби. Какое наименьшее количество различных знаменателей могло оказаться у чисел на доске? (*О. Иванова*)

53. Назовём *улучшением* положительного числа его замену на степень двойки (т. е. на одно из чисел 1, 2, 4, 8, …), при которой оно увеличивается, но не более чем в 3 раза. Дано 2^{100} положительных чисел с суммой 2^{100}. Докажите, что можно стереть часть из них, а каждое из остальных чисел улучшить так, чтобы сумма полученных чисел снова равнялась 2^{100}. (*А. Храбров*)

54. Биссектрисы BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. На продолжениях отрезков BB_1 и CC_1 отмечены точки B' и C' соответственно так, что четырехугольник $AB'IC'$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle BAC = 60^\circ$, то прямая $B'C'$ проходит через точку пересечения описанных окружностей треугольников BC_1B' и CB_1C'. (*А. Кузнецов*)

55. По кругу расположены 2019 тарелочек, на каждой лежит по одному пирожному. Петя и Вася играют в игру. За один ход Петя указывает на пирожное и называет число от 1 до 16, а Вася перемещает указанное пирожное на указанное число тарелочек по или против часовой стрелки (направление каждый раз выбирает Вася). Петя хочет, чтобы когда-нибудь на одной из тарелочек скопилось не меньше k пирожных, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет добиться успеха? (*М. Пилипчук, В. Франк*)