35. О т в е т: 92/91 доллара. Нетрудно доказать по индукции, что в каждый день с нечетным номером Антониум стоит 1 доллар, а в четный день с номером $2n$ он стоит $2n/(2n-1)$ доллар.

36. Поскольку $AD = CD$, то $\angle DAC = \angle DCA$, это вместе с $\angle A = \angle C$ означает, что $\angle BAC = \angle BCA$, поэтому $AB = BC$. Тогда треугольники BDA и BDC равны по трем сторонам. Из этого следует, что BD — биссектриса угла ABC, а кроме того, треугольники BCD и CBE равны по первому признаку, откуда

$$\angle BCE = \angle CBD = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\angle BCD}{2},$$

поэтому CE — биссектриса угла BCD.

37. Фразу *Справа от меня рыцарей больше, чем слева* будем называть первой, а фразу *Слева от меня рыцарей больше, чем справа* — второй. Рыцарей не может быть нечетное число, потому что в этом случае центральный рыцарь (с обеих сторон от которого рыцарей поровну) ни первую, ни вторую фразу произнести не мог. Значит, количество рыцарей четно и существует пара «центральных» рыцарей А и Б (А стоит левее Б, между ними нет других рыцарей и слева от А рыцарей столько же, сколько и справа от Б). Тогда А и все рыцари левее него говорят первую фразу, а Б и все рыцари правее него — вторую. Значит, рыцари одинаковое число раз произнесли первую и вторую фразу, а потому и лжецы сказали эти фразы одинаковое число раз. Тогда лжецов тоже четное число.

Пусть В и Г — пара центральных лжецов (В стоит левее Г, между ними нет других лжецов и слева от В лжецов столько же, сколько и справа от Г). Если бы при этом В стоял правее Б, то слева от В, Г, лжецов, стоящих правее Г, рыцарей было бы больше, чем справа, поэтому все упомянутые лжецы (а их больше половины от числа лжецов) произнесли бы первую фразу, что невозможно. Значит, В стоит левее Б. Если Г стоит правее Б, то с обеих сторон от Б поровну лжецов, и во второй раз ему будет нечего сказать, поэтому Г тоже левее Б. Аналогично, В и Г расположены правее А. В частности, В и Г стоят между А и Б. Осталось заметить, что тогда В вместе с лжецами левее него и Б вместе с рыцарями правее него скажут фразу *Слева от меня лжецов больше, чем справа*, а Г, все лжецы правее Г, А и все рыцари левее А скажут фразу *Справа от меня лжецов больше, чем слева.* Но мы уже поняли, что тех и других поровну.

38. О т в е т: таких чисел не существует. Пусть такие a, b, c существуют, не умаляя общности, $a > b > c$. Из равенства $2b + \text{НОК}(a, c) = 2c + \text{НОК}(a, b)$ заключаем, что $2(b-c)$ делится на a. Но $2(b-c) < 2b < 2a$, поэтому $2(b-c) = a$. Аналогично $2(a-c)$ делится на b, но при этом $4b > 4(b-c) = 2a > 2(a-c)$, откуда либо $2(a-c) = 3b$, либо $2(a-c) = 2b$, либо $2(a-c) = b$. В первом случае из равенств $2(b-c) = a$, $2(a-c) = 3b$ находим, что $a = 10c$, $b = 6c$, во втором случае получаем $a = 4c$, $b = 3c$, в третьем — $a = b$, значит, третий случай невозможен. В остальных случаях мы установили, что a и b делятся на c, поэтому $2a + \text{НОК}(b, c) = 2a + b$ и $2b + \text{НОК}(a, c) = 2b + a$. Но поскольку $a \neq b$, то $2a + b \neq 2b + a$, т. е. равенство из условия задачи не выполняется. Противоречие.

39. Пусть настал тот грустный момент, когда Андрюша больше не сможет съесть ни одного пирожного. От нечего делать пусть Андрюша упорядочит непустые тарелки по возрастанию числа пирожных. Поскольку тарелок с одинаковым количеством пирожных нет, то на последней непустой тарелке (пусть она имеет номер k и называется тарелкой с голубой каёмочкой) лежит не менее k пирожных.

Если на тарелке с голубой каёмочкой ровно k пирожных, то на первой тарелке лежит одно пирожное, на второй — 2, ..., на k-й — ровно k пирожных. В сумме они дают треугольное число $\frac{k(k+1)}{2}$ пирожных, а наибольшее треугольное число, не превосходящее 2019, — это 2016. Получается, что в этом случае три пирожных уже съедено.

Теперь рассмотрим случай, когда на тарелке с голубой каёмочкой не менее $k+1$ пирожного. Теперь Андрюша проделает вторую операцию. Образуется новая тарелка (при этом, возможно, исчезнут какие-то старые) ровно с k пирожными, а на тарелке с голубой каёмочкой лежит не менее k пирожных. Если Андрюша и теперь не сможет съесть ни одного пирожного, то тарелка с голубой каёмочкой по-прежнему осталась тарелкой с максимальным количеством пирожных.

Продолжаем делать вторую операцию. Либо в какой-то момент можно съесть одну тарелку с пирожными, либо после каждой операции на тарелке с голубой каёмочкой будет больше пирожных, чем на любой другой. Но это невозможно, потому что с каждой операцией количество пирожных на ней уменьшается, и рано или поздно они исчезнут с этой тарелочки совсем.

40. Заметим, что если Саша выбрал два одинаковых числа (например x и y), то он написал две дроби равные 1 (в нашем примере x/y и y/x) и тогда утверждение задачи очевидно. Значит, можно считать, что все Сашины числа различны.

Выпишем Сашины дроби в порядке возрастания: q_1, q_2, q_3, $\ldots$, q_{12}. Тогда дроби q_1, q_2, $\ldots$, q_6 меньше 1, а q_7 — самая маленькая из дробей, превосходящих 1. Нетрудно догадаться, что $q_7 = \frac{1}{q_6}$, $q_8 = \frac{1}{q_5}$ и т. д.

Предположим, что любые две дроби отличаются хотя бы на $d = \frac{11}{6}$. Тогда $q_1 > 0$, $q_2 > q_1 + d > d$, $q_3 > q_2 + d > 2d$, $\ldots$, $q_7 > q_6 + d > 6d$. Следовательно, $1 = q_6 q_7 > 5d \cdot 6d = 5 \cdot \frac{11}{60} \cdot 6 \cdot \frac{11}{60} = \frac{121}{120}$. Противоречие.

41. Пусть точка K' симметрична K относительно прямой AB, а точка A' симметрична A относительно BK'. Тогда $AK = AK' = A'K'$ и $\angle A'BC = 7^\circ + 7^\circ + 77^\circ = 91^\circ > 90^\circ$. Значит, $BC < A'C \leqslant A'K' + AK' + AC = 2AK + AC$.