18. Переформулируем задачу в более симметричной форме. Обозначим число $2000/x$ через y. В задаче идет речь про произведение целых частей двух положительных чисел x и y, для которых $xy = 2000$.

Ответ: 0, а также все натуральные значения от 1000 до 2000.

Убедимся сначала, что любое из этих значений достигается. Значение 0 достигается при любом $0 < x < 1$. Кроме того, при всех $x \in [1, 2)$ число $1000/x$ принимает все вещественные значения из интервала $(1000, 2000]$, и его целая часть принимает любое целое значение от 1000 до 2000 (включительно). Умножая их на $[x] = 1$, получаем все ответы от 1000 до 2000.

Докажем, что других значений нет. Верхняя оценка очевидна: $[x][y] \leqslant xy = 2000$.

Если одна из целых частей равна 0, то и произведение равно 0. Случай, когда одна из целых частей равна 1, разбирался выше.

Следовательно, осталось доказать, что при $x, y \geqslant 2$ выполнено неравенство $[x][y] \geqslant 1000$.

Ясно, что хотя бы одна из целых частей больше или равна 3 (иначе оба числа x и y меньше 3, что невозможно). Не умаляя общности допустим, что $[x] \geqslant 2$, $[y] \geqslant 3$.

Заметим, что $x/[x] < ([x]+1)/[x] = 1+1/[x] \leqslant 1+1/2$, ибо $[x] \geqslant 2$. Аналогично, $y/[y] < 1+1/[y] \leqslant 1+1/3$, ибо $[y] \geqslant 3$.

Перемножая эти неравенства, получаем $xy/[x][y] < (1 + 1/2)(1 + 1/3) = 2$, то есть $[x][y] > xy/2 = 1000$, что и требовалось.

19. См. решение задачи 14.

14. Ответ: $-3/2$. Напомним, что наименьшее значение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, имеющего положительный старший коэффициент, равно $f(-b/2a) = (4ac - b^2)/4a$.

Если исходный трехчлен $f(x)$ равен ax^2+bx+c, то $f(2x)-f(x) = (4ax^2+2bx+c)-(ax^2+bx+c) = 3ax^2+bx$, $f(3x) - f(x) = (9ax^2 + 3bx + c) - (ax^2 + bx + c) = 8ax^2 + 2bx$.

Наименьшие значения этих трехчленов равны соответственно $-b^2/12a$ и $-4b^2/32a = -b^2/8a$. Если первое из них равно -1, то второе равно $-3/2$.

20. См. решение задачи 16.

16. Ответ: $2\cdot 14^{200} = 2^{201}\cdot 7^{200}$. У этого числа есть делители $2^{201}\cdot 7^{200}$, $2^{200}\cdot 7^{200}$, $2^{199}\cdot 7^{200}$, произведение которых равно $2^{600}\cdot 7^{600}$.

Докажем, что N не может быть меньше, чем $2\cdot 14^{200}$. Ясно, что число N должно делится на 2^{200}, иначе в произведение любых трех его делителей двойка войдет в степени меньшей, чем 600. Аналогично, N кратно 7^{200}. Таким образом, N кратно 14^{200}. Но N не может быть равно в точности 14^{200}, поскольку у этого числа есть лишь один делитель, равный 14^{200} (остальные меньше), и произведение трех любых делителей строго меньше 14^{600}. Следовательно, $N \geqslant 2\cdot 14^{200}$, что и требовалось.

21. Пусть (a, b) — центр параллелограмма. Тогда абсциссы вершин параллелограмма имеют вид $x_1 = a+p$, $x_2 = a + q$, $x_3 = a - p$, $x_4 = a - q$ для некоторых p и q. Кроме того, их ординаты удовлетворяют условиям $y_1+y_3 = y_2+y_4 = 2b$. Получаем: $2b = (a+p)^3+3(a+p)+(a-p)^3+3(a-p) = (a+q)^3+3(a+q)+(a-q)^3+3(a-q)$. После раскрывания скобок и упрощения: $2a^3 + 6ap^2 + 6a = 2a^3 + 6aq^2 + 6a$, то есть $ap^2 = aq^2$. Поскольку абсциссы вершин параллелограмма, очевидно, раличны, т.е. $p \neq \pm q$, число a обязано равняться 0. Но тогда из (*) получаем $2b = p^3 + 3p - p^3 - 3p = 0$, т.е. $b = 0$.

22. Ответ: $80°$. Поскольку $AX + CY = XY$, на отрезке XY можно отметить такую точку P, что $XP = AX$, $YP = CY$. В треугольнике AZP медиана ZX равна половине стороны AP, поэтому он прямоугольный: $\angle AZP = 90°$. Аналогично, $\angle CTP = 90°$. Таким образом, точки T и Z лежат на окружности с диаметром BP. На ней же лежит и точка D (ибо $\angle BDP$ также прямой). Следовательно, четырехугольник $BZDT$ — вписанный, и потому $\angle ZDT = 180° - \angle ZBT = 80°$.

23. Ответ: можно. Докажем следующую лемму. Пусть квадрат $n^2 \times n^2$ разбит на n^2 квадратов $n \times n$. Все его клетки можно раскрасить в n^2 цветов так, чтобы в каждой строчке, в каждом столбце и в каждом квадрате разбиения каждый цвет встречался ровно один раз (этот принцип используется в головоломках “судоку”).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

Приведем одну из возможных конструкций раскраски (пример для $n = 3$ показан на рисунке). Пусть A — левый-верхний квадрат $n \times n$. Покрасим его в n^2 разных цветов. Теперь покрасим следующий справа квадрат $n \times n$, сдвинув строчки квадрата A по циклу. Еще раз сдвинув их по циклу, покрасим следующий квадрат, и т.д.

Теперь покрасим следующие n строк. Для этого самый левый квадрат в них покрасим, сдвинув по циклу столбцы квадрата A. Следующие квадраты в этих строках покрасим, снова сдвигая строки по циклу.

Продолжая далее сверху вниз, покрасим весь квадрат. Пример раскраски квадрата 9×9 приведен на рисунке.

Из доказанной леммы легко следует решение задачи. Раскрасим квадрат 1024×1024 в 1024 цвета, как требуется в лемме; затем разобьем все цвета на 512 пар, и в каждой паре заменим один из цветов на другой. Теперь в каждой строчке, в каждом столбце и в каждом квадрате все 512 цветов встречаются по два раза.