

42. Ответ: нет, эта разность не может быть больше 400.

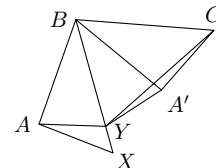
Ясно, что каждый рыцарь дал два одинаковых ответа, поэтому разница между суммами Антона и Ани могла возникнуть из-за того, что некоторые лжецы дали Антону и Ане разные ответы. При этом ответы любого лжеца отличаются лишь на 1 или на 2.

Пусть всего было R рыцарей, L лжецов, и среди них a лжецов, которые дали Ане ответ на 2 меньше, чем Антону. Тогда сумма ответов Антону не может превосходить сумму ответов Ане более чем на $(L - a) + 2a = L + a$.

Лжец, который поменял свой ответ на 2, должен отвечать Антону «два», а Ане — «ноль», и оба ответа должны быть ложными. Следовательно, такой лжец на самом деле соседствует ровно с одним лжецом и одним рыцарем. Рыцарей всего R , и соседей у них, следовательно, не больше чем $2R$. Таким образом, $a \leq 2R$, а поэтому суммарное отличие между ответами Антону и Ане не больше чем $L + 2R = 300 + R$. По условию, это число равно 410, значит, $R \geq 105$.

С другой стороны, суммарная разность 410 получилась за счет того, что ответ любого лжеца изменился не более чем на 2. Значит, лжецов должно быть не меньше 205, а тогда рыцарей — не больше 95. Противоречие. Таким образом, ситуация, описанная в условии, невозможна.

43. Отметим точку A' , симметричную точке A относительно прямой BX . Тогда $\angle ABX = \angle XBA' = \angle A'BC = 35^\circ$ и $A'Y = AY$. Заметим, что треугольники ABX и $A'BC$ равны по двум сторонам и углу, откуда $AX = A'C$. Следовательно, $AX + AY = A'C + A'Y \geq CY$.



44. Ответ: 8 ходов (можно обойти 9 клеток).

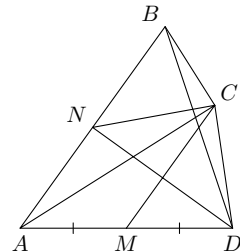
В любом квадрате 3×3 вне зависимости от расстановки чисел можно обойти все клетки, что дает нам 8 ходов. Покрасим доску в 9 цветов так: цвета соответствуют парам остатков от деления на 3 координат клетки. Тогда фишка каждым ходом обязательно меняет цвет (расстояние между разными клетками одного цвета по любой оси координат делится на 3). Расставим числа в порядке возрастания, начиная с 1, так: сначала на клетки первого цвета, потом — второго, и так далее, наконец, закончим на клетках цвета 9. Тогда фишка не может сделать более 8 ходов, так как с клетки цвета 9 никуда пойти не получится.

45. Выберем натуральное число $n > 103$, которое к тому же больше количества цифр исходного числа. Ясно, что каждую минуту к числу на доске прибавляется не более 900. Поэтому на когда-нибудь на доске появится число из промежутка от $\underbrace{10 \dots 0000}_n$ до $\underbrace{10 \dots 0900}_n$. Сумма первых ста цифр такого числа равна 1, и далее много раз подряд к числу будет прибавляться 1, пока не получится число $A = \underbrace{10 \dots 099 \dots 99}_{100}$. Сразу после него появится число $B = \underbrace{10 \dots 100 \dots 00}_{100}$. Сумма его ста первых цифр равна 2, и следующее число равно $C = \underbrace{10 \dots 100 \dots 02}_{100}$.

Заметим, числа A , B и C не делятся на 3, так как их суммы цифр дают остатки 1, 2 и снова 2 по модулю 3.

46. Ответ: $\angle ACB = 90^\circ$.

Заметим, что $\angle BAC = \angle ACM$, откуда $\angle DCM = \angle ACD - \angle ACM = 2\angle ACM$. Обозначим через N середину отрезка AB . Тогда DN — медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника ABD . Далее, точка C лежит на средней линии этого треугольника, которая очевидно является серединным перпендикуляром к DN , следовательно, $CD = CN$. Таким образом, треугольник NCD равнобедренный и CM — его биссектриса. Тогда $\angle NCM = \angle DCM = 2\angle ACM$, следовательно, $\angle NCA = \angle ACM = \angle NAC$. Это означает, что треугольник ANC равнобедренный и $NC = AN = NB$, но тогда $\angle ACB = 90^\circ$.



47. Заметим, что

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1-a-b-c) + ab + bc + ac - abc < d + a^2 + b^2 + c^2.$$

Поэтому

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d}{(a+b+c)^3} > \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1-d)^3}$$

и аналогично оцениваются остальные дроби. Применяя к четырём новым дробям неравенство о средних, получим требуемое.

48. Построим граф: города — вершины, дороги — рёбра. Этот граф связан. Нужно построить в нём остовное дерево с менее чем 100 вершинами степени 2. Будем строить дерево, добавляя в него новые вершины так, чтобы по возможности не появлялись новые вершины степени 2. Начнём с произвольной вершины (ее степень не менее 3), соединённой со всеми своими соседями, вершин степени 2 в этом дереве нет.

Пусть у нас построено дерево T , включающее не все вершины графа, а добавить в него новую вершину без появления вершин степени 2 нельзя. Тогда невисячие вершины T несмежны с вершинами не из T . Пусть $a_1 \in V(T)$ смежна с вершиной x не из T . Понятно, что такая вершина x единственна, иначе добавим их все и вершин степени 2 не прибавится. Ребро ax входит в клику размера 4 — пусть остальные ее вершины a_2, a_3 . Тогда эти две вершины — листья T . Пусть b_1, b_2, b_3 — соседи листьев a_1, a_2, a_3 в дереве T . Если $d_T(b_1) \neq 3$, то удалим ребро a_1b_1 , и подвесим к a_2 вершины a_1 и x . В результате получится большее чем T дерево, а вершин степени 2 не добавится. Итак, $d_T(b_1) = d_T(b_2) = d_T(b_3) = 3$. Если $b_1 = b_2$, то b_3 от них отлична, тогда удалим ребра b_1a_1 и b_1a_2 , после чего подвесим к a_3 листья a_1, a_2, x . Опять же дерево увеличивалось, вершин степени 2 не прибавилось.

Подвесим вершину x к любой из a_1, a_2, a_3 , получим одну вершину степени 2, которой соответствуют 6 вершин $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Очевидно, на других аналогичных шагах вершины a_1, a_2, a_3 использоваться не будут (они не смежны с вершинами вне полученного дерева T'). Предположим, что вершина b_1 используется еще на одном из шагов. Тогда b_1 смежна с листом a'_1 очередного дерева, пусть другие два листа a'_2 и a'_3 смежны с вершинами степени 3 b'_2 и b'_3 , а подвешивается новая вершина x' . Тогда будем считать, что x и a_1 подвешены к a_2 , x' и a'_1 подвешены к a'_2 , а b_1 окажется новым листом, и количество вершин степени 2 уменьшится.

Итого, количество вершин степени 2 окажется строго меньше чем 1 от количества всех вершин.