24. Ответ: 0, -1, -2.

Прибавим во всех трех уравнениях по 1 к левой и правой частям и разложим левые части на множители. Обозначив $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$, получим систему уравнений

$$xy = z, \quad yz = x, \quad xz = y.$$

Далее можно поступить аналогично первому решению, но можно и совсем по-другому. Перемножим все три равенства: $(xyz)^2 = xyz$. Следовательно, $xyz = 0$ или $xyz = 1$. Вспомнив, что $yz = x$, получим $x^2 = 0$ или $x^2 = 1$, откуда $x = 0, 1, -1$.

Легко убедиться, что все три случая реализуются: $x = y = z = 0$; $x = y = z = 1$; $x = y = -1$, $z = 1$.

Осталось сделать обратную замену $a = x - 1$ и т. д. и получить окончательный ответ.

25. Ответ: наименьшее такое число n равно $18\,298\,225 = 9(1 + 2 + 3 + \ldots + 2016) + 1$.

Чтобы понять, как устроена данная последовательность, выпишем несколько первых членов. Сначала в последовательности идут однозначные числа

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad 9.$$

Далее — двузначные:

$$10, \quad 11, \qquad 21, \quad 22, \qquad 32, \quad 33, \qquad \ldots, \qquad 98, \quad 99.$$

Потом трехзначные

$$100,\ 110,\ 111, \quad 211,\ 221,\ 222, \quad 322,\ 332, 333,\ \ldots,\ 988,\ 998,\ 999.$$

Какая же тут закономерность? Подумаем, сколько членов последовательности могут иметь ровно k знаков.

Впервые k-значное число может появиться в этой последовательности лишь в результате операции $99\ldots9 + 1 = 100\ldots0$ (перестановка цифр не требуется). Далее, мы утверждаем, что у от каждого следующего k-значного числа сумма цифр на 1 больше, чем у предыдущего. В самом деле, перестановка цифр не меняет их сумму, а при добавлении 1 сумма цифр увеличивается на 1 всегда, кроме случая, когда последней цифрой была девятка. Но в записи всех чисел в нашей последовательности цифры расположены по убыванию, и если последняя цифра — девятка, то это число состоит из одних девяток и тогда следующий член последовательности — $(k + 1)$-значное число.

Таким образом, суммы цифр последовательных k-значных членов последовательности равны $1, 2, 3, \ldots, 9k$, т. е. последовательность содержит ровно $9k$ k-значных чисел.

Осталось подсчитать ответ. Мы нашли 9 однозначных членов последовательности, $9 \cdot 2$ двузначных, $9 \cdot 3$ трехзначных и т. д., $9 \cdot 2016$ членов с 2016 знаками. Следовательно, номер первого 2017-значного члена последовательности равен

$$9(1 + 2 + 3 + \cdot + 2016) + 1 = \frac{9 \cdot 2016 \cdot 2017}{2} + 1 = 18\,298\,225.$$

26. Пусть $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$. Векторы, идущие по медианам, равны $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ и $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$. Условия $AE \perp BD$ и $AF \perp BC$ переписываются в терминах скалярного произведения:

$$(\vec{b} + \vec{c})(\vec{d} - \vec{b}) = 0 \qquad \text{и} \qquad (\vec{b} + \vec{d})(\vec{c} - \vec{b}) = 0.$$

Раскрыв скобки и вычтя из первого равенства второе, получим: $2(\vec{b}\,\vec{d} - \vec{b}\,\vec{c}) = 0$, т. е. $\vec{b}(\vec{d} - \vec{c}) = 0$. Это и значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны.

27. Ответ: $f(1) = 6$.

Решение полностью аналогично решению задачи 22.

28. Ответ: секретарь участвовал в 6 малых обсуждениях и в 2 больших.

В малом обсуждении участвуют 7 членов жюри, каждый из которых шлёт ровно по одному электронному письму каждому из 6 остальных, значит, в результате малого обсуждения участники посылают $7 \cdot 6 = 42$ письма. Аналогично участники большого обсуждения посылают 210 писем.

Пусть всего состоялось M малых и B больших обсуждений и при этом секретарь участвовал в $m \leqslant M$ малых и в $b \leqslant B$ больших обсуждениях, по условию $m + b \leqslant 10$. Участник малого обсуждения пишет 6 писем, участник большого — 14 писем. Таким образом, секретарь послал $6m + 14b$ писем. Добавляя сюда 1994 письма остальных членов жюри, мы получим все письма, написанные в результате всех обсуждений, т.е. $42M + 210B$ писем. Итак,

$$1994 + 6m + 14b = 42M + 210B. \qquad (*)$$

Правая часть этого равенства делится на 42. Значит,

$$6m + 14b \equiv -1994 \equiv 22 \pmod{42}.$$

Таким образом, теоретически сумма $6m + 14b$ может принимать значения 22, $22 + 42 = 64$, $22 + 42 \cdot 2 = 106$, $22 + 42 \cdot 3 = 148$ и т. д. Но поскольку $m + b \leqslant 10$, сумма $6m + 14b$ не может быть слишком большой:

$$6m + 14b \leqslant 14m + 14b = 14(m + b) \leqslant 14 \cdot 10 = 140.$$

Значит, нам требуется всего лишь проверить, имеют ли уравнения

$$6m + 14b = 22, \qquad 6m + 14b = 64, \qquad 6m + 14b = 106$$

решения в неотрицательных целых числах m и b, где $m + b \leqslant 10$. Эта проверка осуществляется несложным перебором. В результате получаем, что первое и третье уравнение таких решений не имеют. А второе уравнение имеет решение $m = 6$, $b = 2$, которое, вроде бы, нас вполне устраивает.

Теперь нам нужно убедиться, что для найденных значений m и b можно так подобрать числа $M \geqslant m$, $B \geqslant b$, чтобы было выполнено равенство $(*)$, т. е.

$$42M + 210B = 2058.$$

Например, можно взять $B = b = 2$, тогда находим, что $M = 39$.

Итак, мы нашли, что ситуация, описанная в условии, возможна лишь в случае, когда секретарь участвовал в 8 обсуждениях.