29. Если бы среди чисел на доске нашлось 4 нечетных числа, их произведение было бы нечетным и не делилось на 30. Значит, на доске выписано не более трех нечетных чисел. Аналогично на доске выписано не больше трех чисел, не делящихся на 3, а также не больше трех чисел, не делящихся на 5.

В предыдущем рассуждении упомянуто не более 9 чисел, выписанных на доске. Следовательно, на доске есть как минимум еще одно число, и оно должно делиться и на 2, и на 3, и на 5, а значит, и на 30.

30. Ответ: 1234567890123456789.

Рассмотрим пару соседних цифр (если она есть), при перестановке которых число не увеличивается, и разрежем число между этими цифрами. Получилось два числа (второе, правда, может начинаться с нуля), каждое из которых увеличивается при любой перестройке, т. е. цифры каждого из чисел возрастают. Следовательно, первое число не более чем девятизначное, а второе — не более чем десятизначное (ибо может начинаться с нуля). Отсюда получаем, что первое число обязательно должно быть 123456789, а второе — 0123456789.

Если же в числе нет упомянутой выше пары, то, очевидно, число не более чем девятизначное, т. е. оно не удовлетворяет условию задачи.

31. Ответ: при $N = 4034$.

Если $N \leqslant 4033$, то с 2017-го этажа вообще нельзя уехать ни на какой другой. Действительно, если, находясь на 2017 этаже, мы нажимаем кнопку $b \neq 2017$, то лифт поедет, только при условии, что $2017 + b$ делится на 2017 или при условии, что $2017 - b$ делится на 2018. Но при $N \leqslant 4033$ среди чисел от 1 до N лишь одно число делится на 2017 — это само число 2017. Поэтому $2017 + b$ не делится на 2017 ни при каком $b \neq 2017$, и этим способом лифт не поедет. Что касается второй возможности, наибольшее значение разности $2017-b$ равно 2016, а наименьшее — $2017-4033=-2016$. В этом диапазоне лишь одно число делится на 2018 — это число 0, что опять невозможно.

Докажем, что при $N = 4034$ всегда можно с любого этажа попасть на первый (а потом с первого, в силу симметрии, можно будет попасть на любой другой). Пусть мы находимся на этаже номер a.

Если $a < 2016$, то можно подняться на один этаж по следующему алгоритму:

$$a \longrightarrow a+2018 \longrightarrow 4034-(a+2018)=2016-a \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 2017-(2016-a)=a+1.$$

Действуя таким образом, можно добраться до 2016-го этажа, после чего попасть на первый.

При $a > 2018$ спускаемся на 2018 этажей вниз и применяем только что описанный алгоритм.

Если же $a = 2017$ или $a = 2018$, то помогает такая последовательность действий:

$$\begin{array}{ccccc} 2017 \longrightarrow 4034 & \searrow & & & \\ & & 2016 & \longrightarrow & 1. \\ 2018 & \nearrow & & & \end{array}$$

Таким образом, с любого этажа можно попасть на первый.

32. Ответ: выигрывает Петя.

Первый игрок — Петя, а Второй — Вася.

Обобщим задачу — пусть вначале на доске записано число N. Докажем, что если N является степенью двойки, то выигрывает второй, в противном случае выигрывает первый. Для этого достаточно проверить, что

1) если на доске написано число k, не являющееся степенью двойки, то за один ход можно получить степень двойки,

2) из числа k, являющегося степенью двойки, за один ход нельзя получить степень двойки.

Докажем первое утверждение. Пусть k не является степенью двойки. Рассмотрим ближайшую к нему степень двойки

2^n, меньшую k. Тогда $2^n < k < 2^{n+1} = 2\cdot 2^n$, и значит, k не делится на 2^n. Следовательно, по правилам игры k можно заменить на 2^n.

Докажем второе утверждение. Пусть k — степень двойки. Тогда k делится на любую меньшую степень двойки, и значит, получить из него за один ход степень двойки нельзя.

Из доказанных утверждений ясно, как устроена выигрышная стратегия. Если N — не степень двойки, то первый игрок сможет первым же ходом написать на доску степень двойки. После этого второй будет вынужден написать число, не являющееся степенью двойки, после чего первый опять сможет написать степень двойки и т. д. Игра закончится, когда первый напишет число 2 (а единицу в этой игре получить вообще невозможно).

Если же N — степень двойки, то аналогичную стратегию имеет второй игрок. Первый игрок на первом ходу вынужден написать число, не являющееся степенью двойки, после чего второй, наоборот, сумеет написать степень двойки и т. д.

Осталось заметить, что исходное число 10^{2017}, очевидно, не является степенью двойки (оно делится на 5).

33. Маляры перекрашивают клетки «противоположными» способами: если второй маляр пришел на клетку после первого, то, перекрасив ее, он восстановил ее исходный цвет. Если же второй маляр пришел на клетку после того, как первый побывал на ней несколько раз, то мы можем считать, что в первое свое посещение первый маляр не совершал перекрашивания, и второй маляр при своем посещении тоже не перекрашивал эту клетку.

С учетом этих наблюдений стратегия второго маляра тривиальна: сначала он кратчайшим путем (например, вдоль сторон доски) идет на стартовую клетку первого маляра. На это ему потребуется 15 ходов, назовем эти ходы стартовыми. За это время соперник тоже сделает 15 ходов, следовательно, в сумме будет «испорчено» не более 30 клеток (т. е. не более 30 клеток на доске будут несерыми). После этого второй маляр должен совершать в точности те же ходы, которые делал первый маляр 15 ходов тому назад.

Посмотрим, к чему это приведет. Своим 16-м ходом первый маляр, возможно, испортит еще одну, 31-ю, клетку. Своим 16-м ходом второй маляр пойдет туда же, куда ходил первый маляр на 1-м ходу. Значит, мы можем считать, что на 1-м ходу первый маляр не делал перекрашивание, и второй маляр на 16-м ходу тоже не делал перекрашивание. Значит, несерыми могут оказаться лишь клетки, которые перекрасил первый маляр на 2-м — 16-м ходах, а также клетки, которые перекрасил второй маляр во время своих стартовых ходов. В сумме это не более 30 клеток.

Дальше — аналогично. Своим 17-м ходом первый маляр, возможно, испортит 31-ю, клетку. Своим 17-м ходом второй пойдет туда же, куда ходил первый маляр на 2-м ходу. Можно считать, что на 2-м ходу первый маляр не делал перекрашивание, а второй маляр на 17-м ходу не делал перекрашивание. Тогда несерыми могут быть лишь клетки, перекрашенные первым маляром на 3-м — 17-м ходах, а также клетки, перекрашенные вторым во время стартовых ходов. В сумме опять не более 30 клеток. И так далее.

В результате таких действий второго маляра в каждый момент на доске будет не более 31 несерой клетки, и значит, не менее $8 \cdot 9 - 31 = 41$ серых клеток.

Осталось заметить, что первый маляр не мог помешать второму совершать ходы. Действительно, представим себе шахматную раскраску доски. Изначально маляры стоят на клетках разного цвета, после хода первого маляра они окажутся на клетках одного цвета, и поэтому в момент хода второго маляра первый находится не на соседней по стороне клетке. После хода второго маляры снова окажутся на клетках разного цвета и ситуация повторится.

34. Решение 1. Пусть до Нового года в школе было всего N учеников, среди которых имелось M мальчиков, составлявших k процентов от всего контингента. Это значит, что $M = \frac{k}{100}N$, или $100M = kN$.

После Нового года мальчиков стало $M+1$, а всего учеников $N+3$. Если теперь мальчики составляют ℓ процентов (по условию $\ell < 100$, так как после Нового года какие-то девочки в школе точно есть), то

$$100(M+1) = \ell(N+3).$$

Вспоминая равенство $100M = kN$, находим, что

$$\ell N + 3\ell = 100M + 100 = kN + 100,$$

откуда $100 - 3\ell = (\ell - k)N$. Если $3\ell < 100$ (т. е. девочки составляют меньше трети), то число N — натуральный делитель положительного числа $100 - 3\ell < 100$, а потому и само меньше 100. Если же 3ℓ больше 100 (равно 100 оно, очевидно, быть не может), то $(k-\ell)N = 3\ell - 100 \leqslant 3 \cdot 99 - 100 = 197$, и количество учащихся в старом году не больше 197.

Решение 2. Обозначим через m и d количество мальчиков и девочек в школе перед Новым годом. Пусть $\frac{100m}{m+d} = x$, число x по условию целое.

Рассмотрим сначала случай, когда доля мальчиков не изменилась т. е. $\frac{100(m+1)}{m+d+3} = x$. Тогда

$$\frac{100m}{m+d} = \frac{100(m+1)}{m+d+3},$$

откуда $100m(m+d+3) = 100(m+1)(m+d)$, т. е. $3m = m+d$. Таким образом, в этом случае мальчики составляют треть от общего количества учеников, что не является целым числом процентов. Значит, этот случай невозможен.

Осталось разобрать случаи

$$\frac{100m}{m+d} - \frac{100(m+1)}{m+d+3} \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{100(m+1)}{m+d+3} - \frac{100m}{m+d} \geqslant 1.$$

Эти случаи аналогичны, разберем первый из них. Домножив на знаменатели, получаем неравенство

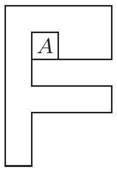
$$100m(m+d+3) - 100(m+1)(m+d) \geqslant (m+d)(m+d+3).$$

Раскрыв скобки, преобразуем левую часть:

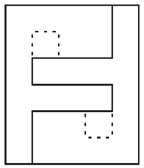
$$100(2m-d) \geqslant (m+d)(m+d+3),$$

откуда $m+d \leqslant \frac{100(2m-d)}{m+d+3}$. Воспользовавшись очевидным неравенством $\frac{2m-d}{m+d+3} < 2$, получаем, что $m+d < 200$.

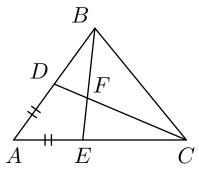
35. Ответ: 6000 фигурок.



Для каждой фигурки отметим клетку A, находящуюся под «верхней перекладиной буквы F», см. рисунок. Очевидно, что при любом расположении непересекающихся фигурок на плоскости, клетка A не может быть накрыта никакой другой фигуркой. Кроме того, у разных фигурок их клетки A не совпадают. Поэтому можно считать, что клетка A принадлежит фигурке. Теперь сложим из двух фигурок прямоугольник 5×6, как на рисунке. Квадрат 300×300, очевидно, можно разрезать на 3000 прямоугольников 5×6, т. е. на 6000 наших фигур. Это количество максимально возможное, поскольку в квадрате не осталось ни одной свободной клетки.



36. Достаточно проверить выполнение трех неравенств треугольника. Пусть F — точка пересечения отрезков BE и CD.



Очевидно, $BE + DC > BF + FC > BC$.

Проверим второе неравенство треугольника: $BE + BC > CD$. Для этого прибавим к частям этого неравенства равные отрезки AE и AD, т. е. проверим, что $AE + BE + BC > AD + CD$. Действительно, по неравенству треугольника $AE + BE > AB$ и $BD + BC > CD$; кроме того, $AB = AD + BD$. Значит,

$$AE + BE + BC > AB + BC = AD + BD + BC > AD + CD,$$

что и требовалось.

Аналогично доказывается третье неравенство треугольника $CD + BC > BE$.

37. На доске остались только составные числа, причем их простые множители лежат в диапазоне от 101 до 999 или от 10 001 до 1 000 000. Заметим тогда, что никакое из оставшихся чисел не может быть равно произведению трех и более простых множителей, так как в этом случае оно было бы больше $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$. Значит, все оставшиеся числа раскладываются ровно на два простых множителя. Но тогда оба

множителя лежат в диапазоне от 101 до 999, поскольку в противном случае произведение больше $100 \cdot 10\,000 = 1\,000\,000$.

С другой стороны, произведение любых двух простых чисел из диапазона от 101 до 999 (включая произведение числа на себя) не превосходит $999 \cdot 999 < 1\,000\,000$, и следовательно, осталось на доске. Итак, если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — это список всех простых чисел от 101 до 999, то на доске остались все их попарные произведения:

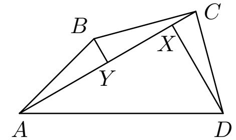
$$\begin{array}{cccccc} p_1p_1, & p_1p_2, & p_1p_3, & \ldots, & p_1p_k, & \\ & p_2p_2, & p_2p_3, & \ldots, & p_2p_k, & \\ & & p_3p_3, & \ldots, & p_3p_k, & \text{и т. д.} \end{array}$$

Произведение этих попарных произведений равно $(p_1p_2\ldots p_k)^{k+1}$.

38. Допустим, что каждый из кружковцев знаком не более чем с пятью. Тогда найдется кружковец, у которого не более четырех знакомых (не существует компании из 49 человек, в которой каждый знаком ровно с пятью, иначе количество пар знакомых будет равно $\frac{49\cdot5}{2}$, т. е. нецелому числу, что невозможно). Возьмем этого человека (назовём его Петей), его знакомых (не более четырех) и знакомых его знакомых (не более 16, поскольку у каждого из Петиных знакомых, кроме Пети, есть еще 4 знакомых). Уберем из рассмотрения эту компанию (не более 21 человека) и рассмотрим еще одного человека (пусть он будет Вася). У Васи может быть пятеро знакомых и не более 20 знакомых его знакомых. Уберем из рассмотрения и эту компанию (не более 26 человек). Так как людей всего 49, а мы убрали не более 47, то еще кто-то остался (пусть это будет Тимур). Но тогда Петя, Вася и Тимур сами не знакомы и не имеют общих знакомых (всех этих людей мы убирали на разных этапах). Противоречие.

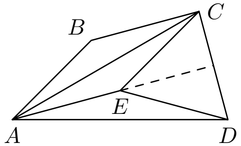
39. Ответ: $BC = 1$.

Решение 1. В треугольнике ACD два угла равны по 75°, поэтому третий угол, т.е. угол DAC, равен 30°. Следовательно, $\angle BAC = 45° - 30° = 15°$.



Опустим перпендикуляры DX и BY на AC. Как нетрудно видеть, $\angle XDC = 90° - \angle XDC = 15°$. Тогда прямоугольные треугольники DXC и BYA равны по гипотенузе и углу. Следовательно, $AY = DX$. Так как в прямоугольном треугольнике ADX угол DAX равен 30°, $AD = 2DX = 2AY$. Значит, CY также равно AY, откуда $AB = BC$.

Р е ш е н и е 2. Построим на строное CD правильный треугольник CDE внутрь четырёхугольника. Тогда точки A и E лежат на серединном перпендикуляре к стороне CD, следовательно, AE — биссектриса угла CAD, т. е.



$$\angle EAC = 15^\circ = 75^\circ - 60^\circ = \angle ACE.$$

Тогда треугольник AEC равнобедренный и $AE = EC = CD = AB$, и значит, точка E является отражением точки B относительно диагонали AC.

Внутри треугольника ABC взята точка D. Оказалось, что $\angle DAB = \angle DBA = 15^\circ$, $\angle BDC = 75^\circ$ и $AB = CD$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

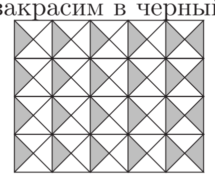
40. Рассмотрим следующие 449-значные палиндромы — 225 групп по 9 палиндромов:

$$\begin{array}{llll}
1000\ldots0001, & 2000\ldots0002, & \ldots, & 9000\ldots0009,\\
9100\ldots0019, & 9200\ldots0029, & \ldots, & 9900\ldots0099,\\
9910\ldots0199, & 9920\ldots0299, & \ldots, & 9990\ldots0999,\\
\ldots & \ldots & \ldots, & \ldots\\
\underbrace{99\ldots9}_{\substack{224\\ \text{девятки}}}1\underbrace{99\ldots9}_{\substack{224\\ \text{девятки}}}, & \underbrace{99\ldots9}_{\substack{224\\ \text{девятки}}}2\underbrace{99\ldots9}_{\substack{224\\ \text{девятки}}}, & \ldots, & \underbrace{99\ldots9}_{\substack{224\\ \text{девятки}}}9\underbrace{99\ldots9}_{\substack{224\\ \text{девятки}}},
\end{array}$$

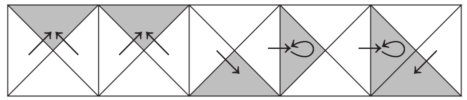
Всего их 2025, т. е. больше 2017. Следовательно, какие-то два из них дают одинаковые остатки при делении на p. Рассмотрим эти два числа и вычтем из большего меньшее. Получится 449-значное число-палиндром, кратное p, правда, возможно, начинающийся и оканчивающийся на один или несколько нулей. Если $p \neq 2$ и $p \neq 5$, то зачеркнем эти нули и получим число, всё равно кратное p. Если же $p = 2$ или $p = 5$, то число-палиндром придумать элементарно — это само число p.

41. О т в е т: наименьшее число черных треугольников равно $mn + \min(m, n)$.

П р и м е р. Пусть для определенности в таблице m строк и n столбцов, причем $m \leqslant n$. В каждой клетке закрасим в черный цвет левый треугольник, а в каждой клетке правого столбца — еще и правый треугольник. Всего получилось $mn + m$ черных треугольников и нетрудно видеть, что этот пример удовлетворяет условию задачи.



О ц е н к а. Рассмотрим любую строку прямоугольника. Она содержит $2n$ «вертикальных» треугольников (т. е. треугольников, имеющих вертикальную сторону). Если такой треугольник покрашен в белый цвет, нарисуем стрелку, ведущую из него в соседний черный треугольник (он лежит в этой же строке); если же вертикальный треугольник черный — проведем из него стрелку в самого себя. Всего мы нарисовали $2n$ стрелок.



Заметим, что в каждый треугольник в этой строке ведёт не более двух стрелок: в горизонтальный треугольник стрелки могут вести лишь из двух вертикальных треугольников в той же клетке, а в вертикальный — лишь из него самого и соседнего с ним вертикального. Следовательно, в этой строке есть не менее n черных треугольников. Аналогично доказывается, что в каждом столбце есть не менее m черных треугольников.

Пойдём дальше. Заметим, что если в какой-то строке оказалось ровно n черных треугольников, то в каждый из них входит ровно две стрелки. В частности, самый левый вертикальный треугольник покрашен не в черный цвет (иначе бы в него вела стрелка лишь из него самого), а в белый. Значит, стрелка из него ведет в один из соседних горизонтальных треугольников, т. е. этот горизонтальный треугольник — черный. Но тогда в него должна вести еще одна стрелка, поэтому правый вертикальный треугольник в этой клетке также белый. Продолжая в том же духе, мы обнаружим, что в каждой клетке этой строки есть ровно один черный треугольник, и он горизонтальный.

Аналогично если в каком-то столбце оказалось ровно m черных треугольников, то все они вертикальные, и расположены по одному в каждой клетке. Однако строка с ровно n черными треугольниками и столбец с ровно m черными треугольниками не могут существовать одновременно: клетка на их пересечении содержала бы ровно один черный треугольник, который должен быть одновременно горизонтальным и вертикальным. Иными словами, либо в каждой строке есть не менее $n+1$ черных треугольников, либо в каждом столбце есть не менее $m+1$ черных треугольников. В одном случае всего черных треугольников не меньше $m(n+1) = mn + m$, в другом — не меньше $n(m+1) = mn + n$, т. е. в любом случае не меньше $mn + \min(m, n)$.

44. Ответ: 2017-е число меньше 83-го.

Решение 1 (отбросим первое и второе число). Объединим числа в пары по порядку их выписывания: первое со вторым, третье с четвертым и т. д. Изобразим их на числовой прямой. Мы утверждаем, что все числа, начиная с третьего, лежат внутри отрезка, образованного первой парой. Действительно, если это неверно, то мы можем взять первое число, не лежащее внутри первой пары чисел. Когда Сережа выписывал это число, с одной стороны от него было ноль чисел, а с другой — хотя бы два, противоречие. А раз все числа лежат внутри первой пары, мы можем её стереть, и условие будет по-прежнему выполняться для каждого из последующих чисел. Рассуждая аналогично, получаем, что все числа, начиная с пятого, лежат внутри пары из третьего и четвертого чисел, все числа начиная с седьмого — внутри пары пятого и шестого, и т. д.

Итак, каждое число лежит внутри всех предыдущих пар. Назовём каждое число левым или правым в зависимости от того, лежит оно слева или справа от парного ему. Тогда каждое число больше всех предыдущих левых чисел и меньше — правых. Поскольку 219-е число больше 84-го, 84-е является левым. А значит, парное ему, 83-е, — правое, и оно больше, чем 2017-е.

Это решение нам подарила редакция журнала «Квантик», его автор — А. Перепечко.

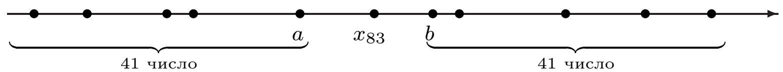
Решение 2 (где может находиться очередное число). Будем считать, что числа в строке пронумерованы в порядке их выписывания. Когда Сережа выписывал 83-е число, обозначим

его x_{83}, уже было выписано 82 числа. Изобразим эти числа на числовой прямой. Пусть a и b — это 41-е и 42-е по величине числа среди выписанных чисел.

Число x_{83} должно обязательно лежать в промежутке (a, b). Действительно, в этом случае имеется 41 число больше его и 41 число меньше его, так что разность этих количеств равна 0. А если бы число x_{83} лежало вне этого промежутка (например, если $b < x_{83}$), то в строке было не менее 42 чисел, которое меньше x_{83} и не более 40 чисел, которые больше, так что разность этих количеств была бы не меньше 2, что запрещено условием задачи.

Аналогичная закономерность выполняется при выписывании каждого числа с нечетным номером: $(2n+1)$-е выписываемое число должно лежать на числовой прямой между двумя центральными числами, т.е между n-м и $(n+1)$-м по величине числами (среди уже выписанных к этому моменту чисел).

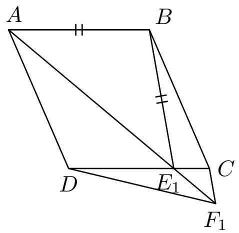
Посмотрим теперь, что происходит при выписывании числа с четным номером, например 84-го.



Рассуждая как в предыдущем случае, мы заключаем, что число x_{84} может лежать лишь в промежутках (a, x_{83}) или (x_{83}, b). В каждом из этих случаев, после того как 84-е число было выписано, чи́сла x_{83} и x_{84} стали центральными. Поэтому, проведя аналогичные рассуждения с числами x_{85} и x_{86}, мы заключаем, что оба этих числа должны находиться в промежутке между числами x_{83} и x_{84}. То же касается и других чисел с бо́льшими номерами: каждые два очередных числа x_{2n+1} и x_{2n+2} должны находиться в промежутке между числами x_{2n-1} и x_{2n} Отсюда также следует, что все числа с номерами больше 84 находятся в промежутке между числами x_{83} и x_{84}.

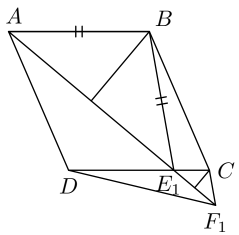
Теперь разберемся, какой из двух случаев расположения числа x_{84} имеет место. Предположим, что число x_{84} лежит в промежутке (x_{83}, b). Тогда все последующие числа лежат в промежутке (x_{83}, x_{84}). Тогда 219-е число тоже лежит в этом промежутке, что противоречит условию: оно должно быть больше числа x_{84}. Значит, имеет место первый случай: x_{84} лежит в промежутке (a, x_{83}). Тогда все последующие числа, в том числе, 2017-е, лежат в промежутке (x_{84}, x_{83}). Следовательно, 2017-е число меньше 83-го.

45. Достаточно проверить, что $DF_1 = BC$. Тогда аналогично $DF_2 = BC$ и задача решена.



Решение 1 (равные треугольники). Стороны треугольника E_1CF_1 соответственно параллельны сторонам равнобедренного треугольника ABE_1. Значит, треугольник E_1CF_1 тоже равнобедренный и $E_1C = F_1C$. Заметим, что тогда треугольники BCE_1 и DF_1C равны. Действительно, они имеют равные пары сторон $E_1C = F_1C$ и $BE_1 = AB = DC$, и равные (в силу параллельности BE_1 и CF_1) углы $\angle BE_1C = \angle DCF_1$. Из равенства треугольников следует, что $DF_1 = BC$.

Решение 2 (проекции). Как и в предыдущем решении убеждаемся, что треугольник E_1CF_1 равнобедренный. Тогда проекция отрезка BC на прямую AE_1 состоит из половины отрезка AE_1 и половины отрезка E_1F_1, т. е. эта проекция составляет половину отрезка AF_1. Так как отрезки BC и AD равны и параллельны, их проекции на прямую AE_1 одинаковы. Тогда проекция AD тоже равна половине AF_1, значит, проекция DF_1 равна второй половине AF_1, откуда $DF_1 = AD = BC$.



46. Ответ: 2018 сотрудников.

Обозначим для ясности $n = 2017$.

Пример. Если сотрудников $k \geqslant n + 2$, то всем, кроме одного из них (начальника), назначим зарплату в 1 тугрик, а начальнику в качестве зарплаты назначим остальную сумму. Такую зарплату выплатить не удастся — не хватит монет по 1 тугрику.

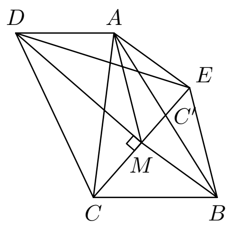
Оценка. Покажем, что если сотрудников не более $n + 1$, то осуществить требуемую выплату возможно. Можно считать, что сотрудников ровно $n + 1$, но, возможно, некоторые из них получают нулевую зарплату. Будем последовательно раздавать сотрудникам монеты до тех пор, пока им не выдана вся причитающаяся сумма. Начнем с самых больших монет. Будем выдавать их тем, у кого зарплата не меньше, чем эта монета. И так до тех пор, пока самые большие монеты не закончатся. Затем перейдем к следующей по величине монете и будем выдавать ее тем, кому до полной зарплаты не хватает не менее, чем этой монеты и т. д. Предположим, что монету в $k > 1$ тугриков никому выдать не удается. Это означает, что всем сотрудникам до полной зарплаты недостает не более $k-1$ тугрика, т. е. общее количество еще не розданных денег не превосходит $(n+1)(k-1) = nk+k-n-1$. С другой стороны, еще не розданы все монеты в $1, 2, \ldots, k-1$ тугрик и хотя бы одна монета в k тугриков. Значит, общее количество не распределенных денег не меньше, чем

$$n\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)\big) + k \geqslant n\big(1 + (k-1)\big) + k = \\ = nk + k > nk + k - n - 1.$$

Противоречие. Следовательно, действуя по указанной схеме, всегда можно распределить все привезенные тугрики.

На предприятии работают несколько сотрудников, зарплата каждого составляет целое число тугриков (разные сотрудники могут иметь разную зарплату). Инкассаторы привезли на предприятие n монет по 1 тугрику, n монет по 2 тугрика, $\ldots$, n монет по k тугриков. Привезенные деньги — это в точности суммарная зарплата всех сотрудников. При каком наибольшем количестве сотрудников зарплату заведомо удастся раздать (так, чтобы каждый получил в точности причитающуюся ему сумму), если известно, что зарплата каждого сотрудника хотя бы а) 2 тугрика; б) 3 тугрика?

47. Пусть C' — середина стороны AB. Продлим медиану из точки C и отметим на ней такую точку E, что $CM = ME$. Тогда DM является медианой и высотой в треугольнике CDE и, значит, $CD = DE$. Поскольку точка пересечения медиан делит их в отношении $2:1$, $ME = CM = 2MC'$, поэтому C' — середина отрезка ME. Следовательно, $AMBE$ — параллелограмм. В частности, треугольники $AC'M$ и $BC'E$ равны. Стало быть, $S_{AME} = S_{AEB}$. Кроме того, $S_{AME} = S_{AMC}$, так как у треугольников AMC и AME совпадают высоты и равны основания. Таким образом, $S_{AMC} = S_{AME} = S_{AEB}$. Поскольку прямые AD и BC параллельны, $S_{ACD} = S_{ABD}$. Следовательно,



$$S_{AMCD} = S_{ACD} + S_{AMC} = S_{ABD} + S_{AEB} = S_{AEBD}.$$

Но удвоенная площадь любого четырехугольника не превосходит произведения длин его диагоналей, поэтому

$$2S = 2S_{AMCD} = 2S_{AEBD} \leqslant AB \cdot DE = AB \cdot CD.$$

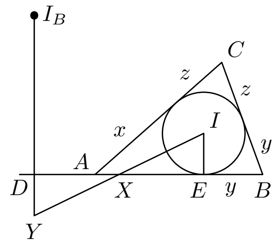
48. О т в е т: выигрывает Вася.

Задача содержит секрет: можно считать, что Петя и Вася играют не с клетчатой полоской, а с ожерельем из 99 бусин. Да, они закрашивают бусинки! Более того, будем считать, что ожерелье имеет застежку. Давайте «уравняем в правах» застежку и бусинки, а именно, постановим, что застежка — это тоже бусинка, причем исключительный ход с закрашиванием одной крайней клетки будем интерпретировать как ход, при котором закрашивается соответствующая крайняя бусинка, *а также* застежка! При таком взгляде правила игры становятся совершенно симметричными и простыми: есть ожерелье из 100 бусин, игроки по очереди закрашивают пары соседних бусин. Каждую бусинку можно закрашивать не более одного раза, проигрывает тот, кто не может сделать ход. В такой игре выигрывает второй игрок: он должен пользоваться симметричной стратегией (каждым ходом закрашивать диаметрально противоположную пару бусин).

49. О т в е т: верно.

Напечатаем сначала карточку $\boxed{s+1}$, затем по карточкам $\boxed{s+1}$ и $\boxed{s}$ напечатаем карточки с корнями квадратного трехчлена $x^2 + (s+1)x + s$, т. е. $\boxed{-1}$ и $\boxed{-s}$. Далее по карточке $\boxed{-1}$ сделаем карточку $(-1) + 1 = \boxed{0}$, и, наконец, по карточкам $\boxed{0}$ и $\boxed{-s}$ напечатаем карточки с корнями квадратного трехчлена $x^2 + 0 \cdot x - s$, т. е. $\boxed{\sqrt{s}}$ и $\boxed{-\sqrt{s}}$.

50. Обозначим длины отрезков касательных из вершины A до точек касания со вписанной окружностью через x, длины отрезков из вершины B до точек касания со вписанной окружностью через y, а из вершины C — через z. Тогда $AB = x + y$, $BC = y + z$ и $CA = z + x$, в частности, $x + y + z$ — полупериметр треугольника ABC. Пусть D — точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны BA, а E — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда I_BD перпендикулярно AB, поэтому достаточно показать, что DY перпендикулярно AB (в этом случае точки I_B, D и Y лежат на одной прямой и она перпендикулярна AB). Для этого проверим, что треугольники XDY и XIE равны по двум сторонам и углу (этого достаточно, поскольку $\angle IEX = 90°$): $IX = XY$ по условию, $\angle IXE = \angle YXD$ как вертикальные, поэтому нужно лишь проверить равенство сторон XD и XE. Для этого выразим их длины через x, y и z:



$$XE = BX - BE = BX - y = \frac{AB + BC}{2} - y = \frac{(x+y)+(y+z)}{2} - y = \frac{x+z}{2} \quad \text{и}$$

$$XD = BD - BX = (x+y+z) - \frac{(x+y)+(y+z)}{2} = \frac{x+z}{2}.$$

51. О т в е т: могут.

Заметим, что всего имеется $396 = 3 \cdot 132$ граничных клеток доски. Для удобства изложения вместо них будем рассматривать вершины правильного 396-угольника. Соседним по стороне клеткам соответствуют соседние вершины, а клеткам, симметричным относительно центра доски, соответствуют вершины, симметричные относительно центра многоугольника O. Путь Вася и Толя действуют по следующему правилу: если Петя закрасил некоторую вершину P, то Вася закрасит такую вершину V, что $\angle POV = 120^\circ$, а Толя — такую вершину T, что $\angle TOP = 120^\circ$ (углы мы считаем как обычно против часовой стрелки). В результате тройка закрашенных вершин образует равносторонний треугольник, и каждый раз после хода Толи множество закрашенных вершин обладает симметрией третьего порядка, т. е. оно не меняется при повороте вокруг точки O на $\pm 120^\circ$. Покажем, что Вася и Толя всегда смогут походить. Предположим, что Петя закрасил вершину P, после чего Вася не может сделать ход. На то могут быть две причины: вершина V, которую стратегия предписывает закрасить, уже закрашена или напротив P находится закрашенная вершина. В силу упомянутого свойства симметрии в первом случае должна быть закрашена и вершина P, а во втором — должна быть закрашена вершина напротив P, и то и другое невозможно. Поэтому Вася всегда сможет походить. По аналогичным причинам всегда сможет походить и Толя. А поскольку в игре может быть сделано не более 396 ходов, игра когда-нибудь закончится и, значит, проиграет Петя.

52. Ответ: при нечетных n.

Пусть n — четно. Предположим, что нам удалось нужным образом расставить числа в таблице. Пусть в некотором столбце написаны числа a, b и c. Тогда $ab + bc + ca$ делится на n и, в частности, четно. Если бы среди чисел a, b и c было два или три нечетных, то число $ab + bc + ca$ — было бы нечетно. Следовательно, среди чисел a, b и c не более одного нечетного. Таким образом, в каждом столбце не более одного нечетного числа, а во всей таблице их не более n. С другой стороны, в каждой строке нечетных чисел $n/2$, а во всей таблице — $3n/2$. Противоречие.

Пусть n — нечетно. Расставим в таблице числа следующим образом (это пока не совсем те числа, которые нам нужны): в первой и во второй строках поставим числа $2, 4, 6, \ldots, 2n$,

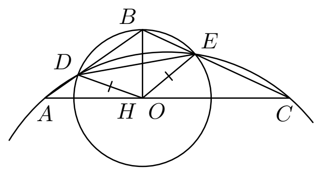
а в третьей строке — числа $-1, -2, -3, \ldots, -n$. Таким образом, числа в столбце имеют вид $2k$, $2k$, $-k$, а сумма их попарных произведений равна $2k \cdot 2k + 2k \cdot (-k) + 2k \cdot (-k) = 0$, что делится на n. Дальше заменим все числа, не кратные n, на их остатки при делении на n, а числа, кратные n, заменим на n. В новой таблице стоят уже натуральные числа, не превосходящие n, и в каждом столбце сумма попарных произведений чисел по-прежнему делится на n. Поэтому достаточно лишь убедиться в том, что в каждой строке стоят различные числа, но это очевидно, поскольку в изначальной расстановке все числа в строках давали различные остатки при делении на n.

В клетках таблицы $(2^k - 1) \times n$ записаны натуральные числа. В каждой из $2^k - 1$ строк по одному разу встречаются числа $1, 2, \ldots, n$. Для каждого столбца сумма попарных произведений стоящих в нём $2^k - 1$ чисел кратна n. Для каких пар чисел k и n это возможно?

53. Ответ: $\angle DHE = 100^\circ$.

Заметим, что треугольники ABC и EBD подобны по двум углам ($\angle BED = 180^\circ - \angle DEC = \angle BAC$).

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника BDE, и пусть $\angle BAC = \angle BED = \alpha$. Тогда $\angle DOB = 2\alpha$ (это центральный угол), и $\angle ODB = \angle OBD = 90^\circ - \alpha$. С другой стороны, $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$, поэтому точка O лежит на прямой BH. Кроме этого, она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку DE.



Однако точка H также лежит на прямой BH и на серединном перпендикуляре к DE (так как по условию она равноудалена от D и E). Но две прямые пересекаются лишь в одной точке! (Эти прямые не совпадают, так как иначе серединный перпендикуляр к DE содержал бы точку B, и тогда треугольник BDE, а с ним и ABC, были бы равнобедренными.) Следовательно, $O = H$.

Итак, $\angle DHE$ — центральный угол в окружности, описанной около треугольника BDE. Центральный угол, дополняющий его до 360°, равен $2 \cdot \angle B = 260^\circ$, поэтому $\angle DHE = 100^\circ$.

54. Ответ: наименьшее значение равно 2.

По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{1-a^2}} \geqslant \frac{a^2}{\frac{1}{2}\left(a^2+\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)} = 2a^2.$$

Сложим это неравенство с двумя аналогичными и получим, что

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \geqslant 2a^2+2b^2+2c^2 = 2.$$

Следовательно, интересующая нас сумма всегда не меньше 2. С другой стороны, если $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $c = 0$, то

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = 2.$$

55. Будем доказывать чуть более общее утверждение. Пусть в бесконечном клетчатом квадранте закрашено $a \geqslant n^2$ клеток. Тогда у закрашенных клеток будет как минимум $a+n$ соседей.

Используем индукцию по n. Базу удобнее всего проверить при $n = 0$: соседей всегда не меньше, чем самих закрашенных клеток (поскольку у каждой закрашенной клетки есть сосед справа и все эти соседи различны).

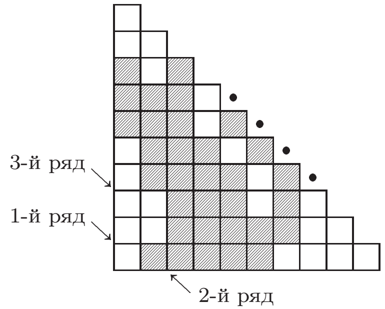
Для перехода используем для идеи. Они обе просты и незатейливы, но мало связаны друг с другом.

Идея 1. Разобьем весь квадрант на вертикальные полосы ширины 2. Заметим, что в каждой такой полосе, в которой есть хотя бы одна закрашенная клетка (будем называть такие полосы *непустыми*), соседей хотя бы на одного больше, чем закрашенных клеток. В самом деле, в каждой горизонтальной доминошке (из которых сложена эта полоса) соседей всегда ровно столько же, сколько закрашенных клеток — проверьте это! Кроме того, самая верхняя закрашенная клетка в полосе даёт еще одного "лишнего" соседа — сверху от себя.

Таким образом, если среди полос ширины 2 есть хотя бы n непустых, то соседей окажется хотя бы на n больше, чем закрашенных клеток, что и требовалось (и без всякой индукции).

Идея 2. Все клетки квадранта разбиваются на диагональные ряды (в самом первом ряду всего одна клетка, в следующем

— две, и т.д.). Рассмотрим самую верхнюю диагональ, в которой еть хотя бы одна закрашенная клетка. Все закрашенные клетки в этой диагонали разбиваются на блоки подряд идущих. Рассмотрим один из таких блоков; пусть в нём k закрашенных клеток.



В следующей (более длинной) диагонали есть $k+1$ клеток, соседних с клетками этого блока. Заметим, что других закрашенных соседей у них нет; здесь используется, что соседние в нашей диагонали с рассматриваемым блоком клетки не закрашены (или вообще находятся за границей квадранта). Поэтому, если выкинуть k клеток этого блока (перестать считать их закрашенными), исчезнет $k+1$ соседей. И если окажется, что соседей осталось хотя бы на $n-1$ больше, чем закрашенных клеток, то на исходной картинке их было хотя бы на n больше.

Осталось разобрать два случая. Если $k \geqslant 2n$, то клетки нашего диагонального блока затрагивают хотя n полос ширины 2, а значит, работает идея 1. Если же $k \leqslant 2n-1$, то после выкидывания этого блока останется $a-k \geqslant n^2-2n+1 = (n-1)^2$, и по индукционному предположению соседей осталось хотя бы на $n-1$ больше, чем закрашенных клеток.

56. Ответ: неверно.

Квадратный трехчлен $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ не имеет корней, а его дискриминант равен $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. Поэтому этот квадратный трехчлен не изменяется при выполнении указанных операций. В частности, из него нельзя сделать трехчлен, имеющий корни.

57. Предположим, что таких членов конечное число и пусть $a_n = 2n$ — последний из них. Из условия следует, что все члены последовательности больше 10, поэтому $n > 5$.

Рассмотрим наименьший простой делитель p числа $n-1$ (это возможно, т.к. $n-1>1$). Число $n-1$ взаимно просто с числами $2, 3, \ldots, p-1$.

Докажем, что $a_{n+k} = 2n+k$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, p-2$, и $a_{n+p-1} = 2n+2p-2$. Используем индукцию по k. База при $k=0$ очевидна. Переход:

$$a_{n+k} = a_{n+k-1} + (n+k, a_{n+k-1}) = 2n+k-1+(n+k, 2n+k-1) =$$
$$= 2n+k-1+(n+k, n-1) = 2n+k-1+(k+1, n-1).$$

При $k = 1, 2, \ldots, p-2$ последний НОД равен 1 и $a_{n+k} = 2n+k$, как и требовалось. При $k = p-1$ этот НОД равен $(p, n-1) = p$ и

$$a_{n+p-1} = 2n+p-2+p = 2n+2p-2,$$

что и требовалось.

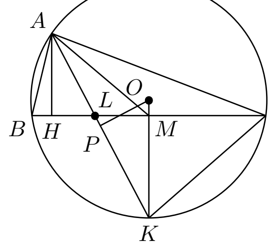
Итак, член последовательности с номером $n+p-1$ ровно в два раза превосходит свой номер, что противоречит предположению.

Мой дорогой Ватсон, вы не понимаете, как можно догадаться рассматривать наименьший простой делитель числа $n-1$? Разумеется, гениальных догадок для решения не требуется — достаточно исследовать последовательность, сделав несколько шагов после $a_n = 2n$. Например, $a_{n+1} = 2n + (2n, n+1)$ и видно, что значение a_{n+1} зависит от того, делится ли $n+1$ на 2. Если делится, то $a_{n+1} = 2n+2$ — и это член, который мы искали! Если же нет, то $a_{n+1} = 2n+1$. Смотрим дальше: $a_{n+2} = 2n+1+(2n+1, n+2)$. Приглядитесь, дорогой друг: от чего зависит этот НОД? Что Вы говорите? От того, делится ли $n+2$ на 3? Что ж, Вы правы! Сделав еще пару ходов, мы получим вопросы, делятся ли $n+3$ на 4, $n+4$ на 5 и так далее. Но гораздо приятнее иметь дело с делимостью одного и того же числа, чем кучи разных! Наши делимости легко переформулировать: делится ли $n-1$ на 2, $n-1$ на 3, на 4, на 5 и так далее. Первый ответ "да" встретится приделимости на минимальный простой делитель числа $n-1$. Осталось

строго доказать полученную закономерность по индукции, что и сделано в решении.

Замечание. При $a_1 = 2$ утверждение задачи неверно: если $a_1 = 2$, то $a_2 = 2 + (2,2) = 4$, а затем $a_3 = 4 + (3,4) = 5$, $a_4 = 5 + (4,5) = 6$, и т.д., $a_n = n+2$ при всех $n > 2$. В этой последовательности лишь первые два члена равны своим удвоенным номерам.

58. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, K — середина дуги BC. Из условия следует, что K лежит на прямой AL, треугольники AHL и KML подобны и $AL < KL$.



Р е ш е н и е 1. Середина P отрезка AK лежит на отрезке KL. Точка O лежит внутри треугольника ABC, точка P — снаружи, потому $OM < OP$, откуда $BM > AP > AL$, чтд.

Р е ш е н и е 2. Достаточно проверить, что $AK < BC$. Для этого сравним острые углы $\angle BAC$ и $\angle ACK$, опирающиеся на эти хорды. Так как $\angle BAC = 2\angle BAK = 2\angle BCK$, $\angle ACK = \angle ACB + \angle BCK$, достаточно сравнить $\angle BCK$ и $\angle ACB$. Для тангенсов этих углов очевидно неравенство

$$\operatorname{tg}\angle BCK = \frac{MK}{MC} > \frac{AH}{HC} = \operatorname{tg}\angle ACB,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Р е ш е н и е 3. $AL^2 < AL \cdot LK = BL \cdot LC \leqslant BC^2/4$, чтд.

59. Положим для краткости $n = 2000$. От числа n нам потребуется лишь четность, таким образом, самом деле мы решим задачу для произвольного четного числа вместо 2000. Сумма чисел от 1 до n^2 равна $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$, а она же, уменьшенная в n раз, равна $s = \frac{1}{2}n(n^2+1)$. Разобьем все числа от 1 до n^2 на пары с суммой n^2+1 в каждой паре. Посмотрим, как разместились в парах красные числа. Пусть они образуют k полностью красных пар и входят в $n-2k$ пар в качестве одного из чисел. Покрасим в синий цвет оставшиеся числа в $n-2k$

парах и еще произвольные k пар. Тогда число красно-синих пар в точности равно n, и значит, сумма красных и синих чисел равна $n(n^2+1)=2s$. Стало быть, сумма синих чисел равна s. В оставшиеся цвета покрасить совсем просто: для очередного цвета возьмем $\frac{n}{2}$ еще не использованных пар чисел и покрасим их в этот цвет. Сумма чисел в этих парах как раз равна s.

На доске написаны числа от 1 до n^2. Вася выбрал из них n чисел, сумма которых в n раз меньше суммы всех чисел на доске, и покрасил их в красный цвет. Докажите, что его друг Петя сможет покрасить остальные числа в другие $n-1$ цветов (в каждый цвет по n чисел) так, чтобы суммы чисел каждого цвета были одинаковы.

60. Воспользуемся неравенством

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca).$$

Для его доказательства достаточно раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и заметить, что получившееся неравенство есть сумма трех неравенств: $\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geqslant ab$, $\frac{1}{2}(b^2+c^2) \geqslant bc$ и $\frac{1}{2}(c^2+a^2) \geqslant ca$.

Из условия $\sqrt{xyz}=xy+yz+zx$ следует, что

$$xyz=(xy+yz+zx)^2 \geqslant 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)=3xyz(x+y+z).$$

Сокращая на xyz, получаем требуемое.

62. Построим орграф G, города — вершины, дороги — ориентированные рёбра (будем называть их стрелками). Напомним, что орграф называется *сильно связным*, если между любыми двумя вершинами существует путь по стрелкам (именно такой орграф у нас получился). Если орграф не является сильно связным, его вершины можно разбить на компоненты сильной связности — максимальные по включению сильно связные подграфы. В отличие от обычных компонент связности, между двумя компонентами сильной связности могут быть проведены стрелки, но только одного направления, иначе эти две компоненты нужно было бы объединить в одну.

Компонента сильной связности называется *крайней*, если из нее не выходит ни одной стрелки в другие компоненты сильной

связности. Такая компонента сильной связности обязательно есть (докажите это!).

Вернемся к решению задачи. Для цикла Z в орграфе G обозначим через G_Z граф, полученный из G в результате удаления стрелок цикла Z. Предположим противное, пусть для любого цикла Z граф G_Z не сильно связен. Тогда выберем Z так, чтобы одна из крайних компонент сильной связности орграфа G_Z содержала наименьшее возможное число вершин — обозначим ее U. Из каждой вершины U выходит хотя бы две стрелки в орграфе G, а значит, хотя бы одна стрелка в орграфе G_Z (цикл проходит по вершине не более одного раза). Следовательно, в компоненте U более одной вершины. Так как орграф U сильно связен, в нем есть цикл C.

Рассмотрим орграф G_C. Все отличные от U компоненты G_Z остались сильно связными подграфами и в графе G_C, так как все стрелки между ними сохранились, а стрелки цикла Z — добавились. Если орграф U_C (результат удаления из U рёбер цикла C) сильно связен, то и G_C сильно связен, в этом случае задача решена. Если же U_C — не сильно связен, то в нем есть крайняя компонента сильной связности W, строго меньшая, чем U. Легко понять, что W является крайней компонентой сильной связности и в G_C (это сильно связный орграф, из которого не выходит рёбер вовне), что противоречит выбору цикла Z.

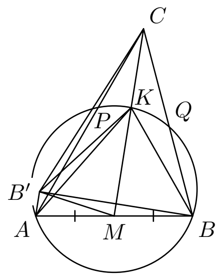
63. Выберем k учеников из первого кружка, рассадим их в разные кабинеты. Выберем k других человек из второго кружка и рассадим их, и так далее.

На самом деле утверждение верно для значительно большего, чем m, количества кружков N. Это можно доказать так. Рассмотрим $k+a$ комнат, где число a определим позже. Посадим каждого школьника в одну из этих комнат, выбирая ее случайно (все комнаты равновероятны). Назовем комнату *подозрительной*, если в ней оказались представители не всех кружков. Предположим, что случилась УДАЧА: оказалось не более чем a подозрительных комнат. Тогда имеется k неподозрительных комнат, мы можем назвать их кабинетами, и искомая рассадка найдена. УДАЧА заведомо иногда случается, если математическое ожидание E числа подозрительных комнат меньше чем $a+1$. Заметим, что E равно количеству комнат $a+k$, умноженному на вероятность того, что конкретная комната подозрительна. Эта вероятность, в свою очередь, не превосходит $N(1-\frac{1}{k+a})^{km}$. Итак, если

$$N(a+k)\Big(1-\frac{1}{k+a}\Big)^{km} < a+1,$$

то при таком N требуемая рассадка существует. Уже при $a = k$ получается экспоненциальное по m выражение, наилучшего результата — около $\frac{e^{m-1}}{m}$ — можно добиться при $a \approx \frac{k}{m-1}$.

64. Пусть M — середина стороны AB, K — середина дуги PQ, лежащая на отрезке CM, B' — точка, симметричная точке B относительно медианы CM.



Предположим противное. Тогда $B' \neq A$, $AB' \parallel CM$ и

$$\angle CAK = \angle PAK = \angle QBK = \angle CB'K.$$

Таким образом, CK и AB' — основания вписанной, а следовательно, равнобочной трапеции $AB'CK$. Значит, $AK = CB' = CB$, $AC = KB' = KB$, и треугольники AKB и BCA равны по трем сторонам. Противоречие: один из двух равных треугольников не может лежать внутри другого.

65. Ответ: наименьшее значение равно 2.

Заметим, что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} \geqslant 2\cos^2 x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t \geqslant 2(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t) = 2.$$

Стало быть, интересующая нас сумма всегда не меньше 2. С другой стороны, если $x = y = \frac{\pi}{4}$ и $z = t = \frac{\pi}{2}$, то

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 0 = 1,$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} t = 2\cdot 1 + 2\cdot 0 = 2.$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \frac{\pi}{2}]$ удовлетворяют условию

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n = 1.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина

$$\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_2 + \ldots + \operatorname{ctg} x_n?$$

66. Предположим противное. Разобьем натуральный ряд на отрезки по 199 чисел. Тогда во всех отрезках, кроме, быть может, конечного количества, имеется почти квадрат. Отсюда следует, что среди чисел от 1 до n^2 количество почти квадратов не меньше, чем $\frac{n^2}{199} - c$, где c — некоторая константа. С другой стороны, каждый такой почти квадрат имеет вид ab, где $a \leqslant n$, $b \in [a, a+\frac{a}{100}]$, поэтому их количество не больше чем

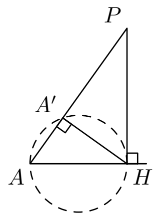
$$\sum_{a=1}^{n}\Big(\frac{a}{100}+1\Big) = n + \frac{n(n+1)}{200} < \frac{n^2}{199} - c$$

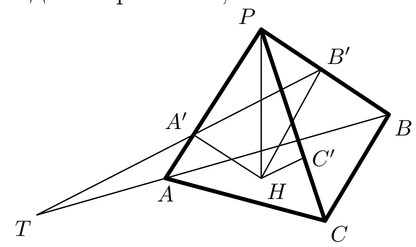
при достаточно большом n. Противоречие.

67. Заметим, что $PA \cdot PA' = PH^2 = PB \cdot PB'$, так что точки A, B, A', B' лежат на одной окружности. Пусть T — точка пересечения прямых AB и $A'B'$. Имеем

$$TA \cdot TB = TA' \cdot TB' = TH^2,$$

последнее равенство выполнено в силу того, что прямая TH — касательная к сфере с диаметром PH, а $TB'A'$ — секущая.





Таким образом, точка T лежит на радикальной оси окружности, описанной около треугольника ABC, и точки H. На ней же лежат точки $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$. Значит, прямая $\ell = ABC \cap A'B'C'$ и есть эта радикальная ось. Она перпендикулярна линии центров OH.

68. Рассмотрим граф знакомств математиков. По условию этот граф *хордовый*, т. е. в нем любой цикл из 4 или более вершин содержит хорду (пару смежных вершин, не соседних в цикле). Докажем, что для хордового графа G выражение $f(G) := c_1 - c_2 + c_3 - \ldots$, где c_i — количество клик в G на i вершинах, равно числу $k(G)$ компонент связности графа G.

Решение 1. Предположим, что это не так, и рассмотрим в качестве G наименьший по числу вершин контрпример. Ясно, что граф G содержит больше одной вершины и связен (иначе одна из компонент связности была бы меньшим контрпримером). Удалим из графе G произвольную вершину v, пусть новый граф $G\backslash v$ распался на компоненты $G_1, \ldots, G_k$. Пусть H_1, $H_2, \ldots, H_k$ — подграфы в $G_1, \ldots, G_k$ соответственно на соседях вершины v. Несложно видеть, что

$$f(G) = 1 + \sum_{i=1}^{k} f(G_i) - \sum_{i=1}^{k} f(H_i), \qquad (*)$$

где слагаемое 1 соответствует клике $\{v\}$, слагаемые $f(G_i)$ — кликам, не содержащим v, слагаемые $-f(H_i)$ — кликам, содержащим v (при удалении из них вершины v меняется четность, а стало быть, знак в выражении для f). В силу минимальности контрпримера $f(G_i) = 1$, $f(H_i) = k(H_i)$. Проверим, что $k(H_i) = 1$ при всех i. Предположим противное, тогда вершины одного из графов H_i можно разбить на два непустых подмножества V^-, V^+ так, что ни одно ребро не ведет из V^- в V^+. Рассмотрим наименьший по числу ребер путь $x \ldots y$ из V^- в V^+ в графе G_i. Тогда цикл $vx \ldots yv$ не имеет хорды в графе G.

Мы проверили, что $f(H_i) = f(G_i)$ при всех i. Тогда по формуле $(*)$ $f(G) = 1 = k(G)$, т. е. граф G оказался неконтрпримером.

Решение 2. Назовем вершину *допустимой*, если все ее соседи попарно смежны между собой.

Лемма. В хордовом графе, имеющем хотя бы две вершины, есть хотя бы две допустимые вершины.

Доказательство. Предположив противное, рассмотрим наименьший по числу вершин контрпример — граф G. Заметим, что в G нет вершины v, смежной со всеми (иначе $G\backslash v$ — меньший контрпример). Пусть v — недопустимая вершина в G, N — множество соседей вершины v, $H = G\backslash(N \cup v)$ — граф на оставшихся вершинах. Заметим, что если u_1, u_2 — несмежные соседи v, то не существует пути из u_1 в u_2, все промежуточные вершины которого принадлежат H, — иначе бы наименьший по числу ребер подобный путь, дополненный путем u_2vu_1, оказался бы циклом без хорд. Пусть H_1 — одна из компонент связности графа H, N_1 — множество вершин в N, имеющих соседа в H_1. По доказанному N_1 — клика, так что $N_1 \neq N$. Рассмотрим (хордовый, разумеется) граф на вершинах v, N_1, H_1. В нем в силу минимальности контрпримера имеется допустимая вершина w, отличная от v. Она не может принадлежать N_1, потому что каждая вершина в N_1 имеет соседями v и какую-то вершину в H_1. Значит, она принадлежит H_1, а потому является допустимой и в G. Чтобы найти допустимую вершину, отличную от w, повторим рассуждение, взяв в качестве исходной вершины v соседа вершины w. ▫

Возвращаясь к решению задачи, будем рассуждать по индукции по числу вершин. Для допустимой вершины v индукционный переход от графа $G\backslash v$ к графу G очень простой: если она изолированная, интересующая нас сумма увеличивается на 1, в противном случае ни сумма, ни число компонент связности не меняются.

69. Пусть $\vec{v} \in V_2\backslash V_1$, тогда $\vec{v}$ лежит в треугольнике с вершинами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ из V_1, и значит, $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, где α, β, γ — неотрицательные рациональные числа с суммой 1 (они пропорциональны площадям треугольников vbc, vac, vab соответственно). Если $N = N(\vec{v})$ — общий знаменатель чисел α, β, γ, то N прыжков на вектор $\vec{v}$ можно заменить на αN прыжков на вектор $\vec{a}$, βN прыжков на вектор $\vec{b}$, γN прыжков на вектор $\vec{c}$. Таким образом, можно считать, что второй кузнечик использует прыжок на вектор $\vec{v}$ менее чем $N(\vec{v})$ раз.

Предположим, что утверждение задачи неверно, тогда имеется последовательность точек x_i, такая что $f(x_i) - g(x_i) \to \infty$, где $f(x)$ и $g(x)$ обозначают количества прыжков, необходимых первому и второму кузнечикам соответственно, чтобы достичь точки x. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что набор использованных вторым кузнечиком прыжков из $V_2 \backslash V_1$ всегда один и тот же — ведь мы добились того, что количество возможных таких наборов конечно. Еще несколько раз переходя к подпоследовательности, можем считать, что для каждого вектора $\overrightarrow{a} \in V_1$ количество $n_i(\overrightarrow{a})$ прыжков на вектор $\overrightarrow{a}$ у второго кузнечика для достижения точки x_i стабилизируется или же возрастает к бесконечности. Это позволяет считать, что при $i > j$ точка x_i достигается вторым кузнечиком через промежуточную точку x_j, причем все прыжки из x_j в x_i лежат в V_1 и их количество равно $g(x_i) - g(x_j)$. Но тогда первый кузнечик может попасть в x_i за $f(x_j) + g(x_i) - g(x_j) = g(x_i) + c$ прыжков. Противоречие.