РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, 2017

1. Ответ: последняя цифра произведения у Сережи — 4.

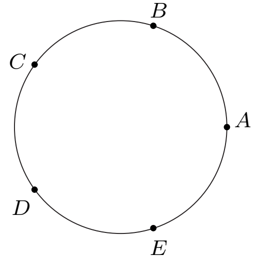
Заметим, что все получившиеся последние цифры у ребят чётные. Кроме того, среди выбранных шести чисел встретится число, кратное 5. Если оно стоит не на краю, то у Сережи и какой-то из девочек произведения оканчиваются на 0, что противоречит условию.

Если же число, кратное 5, стоит на на краю, например в начале, то на другом краю (в конце) число тоже делится на 5. Тогда у обеих девочек девочек произведения оканчиваются на 0, а числа, которые перемножал Сережа, оканчиваются либо 1, 2, 3, 4, либо на 6, 7, 8, 9. В обоих случаях произведение Сережи оканчивается на 4.

Замечание. Можно было бы не делать всех этих наблюдений о делимостях, а просто догадаться, что последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей, после чего перебрать 10 вариантов: когда первое число оканчивается на 1, когда оно оканчивается на 2, . . . , когда оно оканчивается на 0.

2. Ответ: 5 часов.

Обозначим деревни A, B, C, D, E. По условию из деревни A в другие деревни по маршрутам A–B, A–B–C, A–E, A–E–D курсируют автобусы и велосипеды. Предположим, маршрут A–B–C можно преодолеть за 4 часа на велосипеде. Тогда в поездках A–B, а также в поездке из B в C используются двухчасовые автобусы. Получается, что при поездке на автобусе из A в B, а после этого из B в C мы потратим в сумме 4 часа, т. е. столько же,



сколько требует велосипедный маршрут A–B–C. Но этого не может быть, так как автобус движется быстрее велосипеда.

Значит, предположение, сделанное нами, неверно, и маршрут A–B–C принято проезжать за два часа на автобусе. Тогда аналогично маршруты C–D–E, E–A–B, B–C–D, D–E–A тоже преодолеваются за два часа на автобусе. Проехав по всем этим маршрутам, мы объедем шоссе два раза, потратив на это 10 часов. Следовательно, один круг занимает 5 часов.

3. Например, подходит следующая расстановка.

к	к	к	к	с	с			
				к	к	к	к	к
с	с	с	с	с				
с	с	с	с					

Если щелкнуть по строкам, получится две красных строки, одна белая и одна синяя. Далее, щелкая по столбцам, получаем красную таблицу.

Если же сначала щелкать по столбцам, получится 5 синих столбцов и 4 белых. И теперь, если щелкать по строкам, таблица станет синей.

4. Р е ш е н и е 1 (принцип Дирихле). Всего в этих домах живёт 125 человек. На каждое имя приходится хотя бы три человека, а значит, всего у этих людей не более чем 42 имени. Значит, в самом многолюдном доме есть двое тёзок.

Имена — это клетки, а люди — зайцы. При рождении каждому человеку дают имя, т. е. сажают его в клетку.

Р е ш е н и е 2 (принцип крайнего). Рассмотрим самый большой дом — тот, в котором живет 45 человек. Предположим, что тезки этих людей живут в других домах. Это значит, во-первых, что все обитатели большого дома имеют разные имена, а во-вторых, что никто не может быть тезкой сразу двух человека из большого дома. Поэтому суммарное количество тезок у жителей большого дома не менее 90 и все эти тезки живут в остальных четырех домах. Но это невозможно, поскольку в остальных домах в сумме живет лишь 80 человек. Полученное противоречие доказывает, что мы сделали неверное предположение, и значит, некоторые жители большого дома — тезки.

5. О т в е т: 11 столбцов.

Р е ш е н и е 1 (конструктив). Очевидно, что обе строки данного фрагмента 2×2 можно однозначно продолжить влево. Получится более широкий фрагмент таблицы:

22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

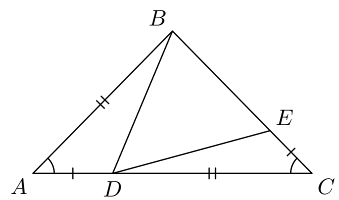
Теперь ясно, что числа от 1 до 12 выписаны в предыдущей строке, и всего в этой таблице имеется 11 столбцов.

Р е ш е н и е 2 (двусторонняя оценка). В первой строке числа идут слева направо по возрастанию. Значит, 12 и 13 находятся не в первой строке, откуда в таблице не более 11 столбцов. С другой стороны, все числа от 12 до 33 должны поместиться в двух строках. Таких чисел всего 22, а значит, столбцов не менее 11.

6. Мысленно выпишем числа друг под другом и попытаемся найти их сумму S с помощью сложения «в столбик». В разряде единиц по одному разу выписаны цифры 0, 1, 2, …, 9. Их сумма равна 45. Поэтому последняя цифра числа S равна 5, и при продолжении вычислений в следующий разряд переносится 4 единицы. В разряде десятков также по одному разу выписаны цифры 0, 1, …, 9 с суммой 45. С учетом переноса получается сумма 49, т. е. предпоследняя цифра числа S равна 9. Таким образом, число S оканчивается на 95. Значит, оно делится на 5, но не делится на 25, и поэтому не может быть точным квадратом.

Ещё одна причина, почему число, оканчивающееся на 95, не является точным квадратом — оно даёт остаток 3 при делении на 4, а квадраты при делении на 4 могут давать только остатки 0 или 1.

7. Пусть D — место, где яхта села на мель, а E — место, в котором в этот момент оказался катер. Тогда $AD = 20$ км, $CD = 50$ км, $CE = 20$ км. Кроме того, $\angle BAC = \angle BCA$, поскольку треугольник



ABC равнобедренный. Тогда треугольники BAD и DCE равны по первому признаку, и мы получаем, что $BD = DE$. Так как после аварии катер и лодка плывут с одинаковыми скоростями, они придут на помощь одновременно.

8. Наибольшее количество монет, которые можно сорвать с двух соседних кустов, — это $7 = 3 + 4$. 10 кустов образуют 5 пар соседних кустов, значит, наибольшее число монет, которые можно сорвать со всех кустов и не быть арестованным, — 35; для этого нужно попеременно срывать 3 и 4 монеты. Значит, именно так Алиса и собрала свои монеты. Можно считать для определенности, что с первого куста она сорвала 4 монеты (в противном случае она сорвала 4 монеты с последнего куста, тогда просмотрим запись всей прогулки в обратном направлении).

Заметим, что 9 монет с каждого куста можно было сорвать двумя способами: $9 = 2+3+4$, либо $9 = 3+3+3$. С первого куста Алиса сорвала 4 монеты, значит, это был первый способ, и кто-то из остальных персонажей собрал с первого куста 3 монеты и тогда он же не мог собрать 3 монеты со второго куста. Значит, для сбора монет со второго куста тоже применялся первый способ. Продолжая это рассуждение, заключаем, что все кусты были обобраны первым способом.

Пусть для определённости Буратино сорвал с первого куста 2 монеты, а Василио — 3 монеты. Тогда со второго Буратино обязан сорвать 4 монеты, а Василио — 2 монеты. Способ срывания монет с каждого следующего куста однозначно определяется предыдущим: с кустов с нечётными номерами Буратино срывает 2, а Василио — 3 монеты, а с кустов с чётными номерами — 4 и 2 соответственно. Тогда Василио сорвал в сумме 25 монет, что меньше 26.

9. Ответ: 2 000 000 рублей.

При распиливании горного хрусталя получаются две равные части, каждая из которых стоит в 2 раза дешевле, чем исходный камень. Значит, суммарная цена этих половинок такая же, как и у целого камня. А при распиливании алмаза, получаются две равные части, каждая из которых стоит в 4 раза дешевле, чем исходный алмаз. Таким образом, распил алмаза

приводит к потере половины его стоимости. При дележе наследства братья потеряли 1 000 000 рублей, эти потери равны половине исходной стоимости алмазов. Следовательно, алмазы стоили 2 000 000 рублей.

11. Ответ: 8 участников.

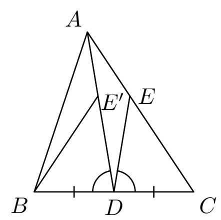
Оценка. Результат участника увеличился на $6k$, где k — количество его оценок 0, 1, 2. Очевидно, $0 \leqslant k \leqslant 7$. Если какие-то два участника имеют одинаковое количество оценок, не превосходящих 2, то их результаты увеличились одинаково, и значит, в конце эти двое имеют тот же порядок результатов, что и в начале. Значит, могло быть не более 8 участников.

Вот еще одно, более геометричное рассуждение. Пронумеруем участников по убыванию результатов. Очевидно, второй после исправления «перепрыгнул» через первого, и значит, его результат после исправления увеличился не меньше чем на 6. Третий участник «перепрыгнул» через первого и второго, и тогда его результат увеличился сильнее, чем результат второго, т. е. не меньше чем на 12. Аналогично, результат четвертого увеличился не менее чем на 18 и т. д. Поскольку в олимпиаде было 7 задач, никакой результат не мог увеличиться больше чем на 42. Значит, было не более 8 участников.

Пример. Описанная ситуация возможна, если, например, участники имели следующие результаты.

3	3	3	3	3	3	3
0	3	3	3	3	3	3
0	0	3	3	3	3	3
0	0	0	3	3	3	3
0	0	0	0	3	3	3
0	0	0	0	0	3	3
0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0

12. Решение 1. Отметим на отрезке AD такую точку E', что $DE' = DE$. Заметим, что тогда треугольники BDE' и CDE равны по двум сторонам и углу, значит, $BE' = CE$. Нам нужно проверить, что периметр треугольника ADC больше периметра четырехугольника $ABDE$, т. е. что



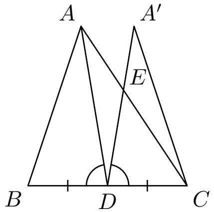
$$AE' + E'D + DC + AE + EC > BD + AB + AE + ED.$$

Уберем из обеих частей общий отрезок AE, равные отрезки $DC = BD$, $E'D = ED$, и заменим в левой части EC на $E'B$, получим неравенство

$$AE' + E'B > AB.$$

Это неравенство треугольника для треугольника $AE'B$.

Р е ш е н и е 2. Построим треугольник $DA'C$ симметричный треугольнику DAB относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC. Тогда $AD = A'D = A'E+ED$, $AB = A'C$. Уберем из периметров треугольника ADC и четырехугольника $ABDE$ равные отрезки $BD = DC$. Тогда нам остается доказать неравенство



$$AB + AE + ED < AD + AE + EC.$$

Уберем общий отрезок AE и воспользуемся написанными выше равенствами.

$$A'C + ED < A'E + ED + EC.$$

Убрав из обеих частей отрезок ED, получаем неравенство треугольника для треугольника $A'EC$.

13. О т в е т: это числа 27 и 37.

Обозначим через x меньшее из чисел. Тогда $x(x+10) = 9...9$. Раскроем скобки в левой части и прибавим к обеим частям 25. Мы получим уравнение

$$(x + 5)^2 = 10...024.$$

Точнее говоря, такая запись (а мы считаем, что здесь четко указано, что в правой части два или более нуля) получается, если число, состоящее из девяток, из условия задачи содержало не менее четырех девяток. Написанное уравнение не имеет целых корней, поскольку при наличии двух и более нулей правая часть делится на 8, но не делится на 16 и потому не может быть точным квадратом. Если же девяток в исходном числе было меньше (одна, две или три), мы получим соответственно уравнения

$$(x + 5)^2 = 34, \quad (x + 5)^2 = 124, \quad (x + 5)^2 = 1024.$$

Лишь последнее из этих уравнений имеет натуральный корень $x = 32$, который и дает ответ.

14. О т в е т: $a = 3$ или $a = 1$.

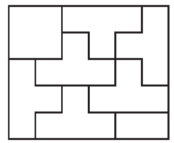
По теореме Виета $p = -a-b$, $q = ab$. Тогда по условию число $a + p = a + (-a - b) = -b$ делится на $q - 2b = ab - 2b = (a - 2)b$. При $a = 2$ последнее число равно нулю и говорить о делимости некорректно, при $a = 3$ или $a = 1$ делимость имеет место, при остальных целых значениях a делимость невозможна, поскольку делитель по модулю крупнее делимого.

Заметим, что оба найденных ответа подходят, например, для трёхчлена $x^2 - 4x + 3$.

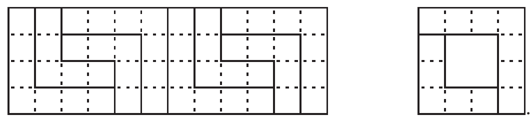
15. О т в е т: наименьшее число кусков — 800.

О ц е н к а. Очевидно, все куски должны быть не более чем четырехклеточные. Значит, каждый прямоугольник 5×6 (его площадь равна 30) разрезан не менее чем на 8 кусков и тогда суммарное число кусков не меньше 800.

П р и м е р. Разрежем все прямоугольники на 8 кусков так, как показано на рисунке. В результате образуются четырехклеточные фигурки нужного вида, а также 100 прямоугольников 1×2 клетки, из которых нетрудно составить еще 50 квадратов 2×2.

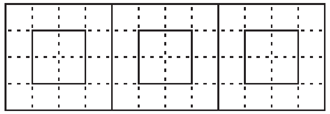


Некоторые участники олимпиады считали, что для минимизации общего числа кусков всегда нужно выпиливать наибольшее количество целых фигурок. Это утверждение в общем случае неверно. Например, если нужно распилить прямоугольник 4×12 так, чтобы потом складывать 12-клеточные «рамки», то можно обойтись восемью частями, из которых складываются четыре рамки.



8 частей, из которых можно сложить 4 рамки

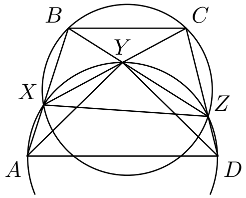
Если же стремиться сразу выпилить как можно больше рамок, то удастся выпилить только три рамки



но затем каждый центральный квадратик 2×2 придется распилить еще как минимум на две части, поэтому общее количество частей будет не меньше девяти (на самом деле ровно девять, поскольку каждый квадратик можно распилить на две доминошки, а из доминошек легко собирается еще одна рамка).

16. Заметим, что

$$\angle AXZ + \angle ADZ = 180^\circ$$



Тогда для дополнительных углов имеет место аналогичное равенство

$$\angle BXZ + \angle BCZ = 180^\circ,$$

следовательно, четырехугольник $XBCZ$ вписанный. Тогда $\angle BXC = \angle BZC$. Поскольку эти углы дополняют до 180° вписанные углы, опирающиеся на хорды AY и DY, эти хорды равны.

17. Пусть работница обслужила одного клиента, начала обслуживать другого, и за это время в очередь не вставали новые люди. Тогда время обслуживания этих клиентов одинаково. В самом деле, если первого обслуживали T/n микросекунд (где T — оставшееся время, выраженное в микросекундах, а n — количество человек в очереди, то следующего будут обслуживать $\frac{T-T/n}{n-1} = \frac{T}{n}$ микросекунд.

Отметим на числовой оси 130 красных точек — моменты начала обслуживания посетителей (130 точек) и 30 синих точек — моменты прихода в очередь дополнительных 30 человек. Синие точки делят красные на 31 группу, и в одной из них не менее 5 красных точек (так как $4 \cdot 31 < 130$). Следовательно, есть 5 человек подряд, во время обслуживания которых никто не приходил. Ясно, что они-то и обслуживались поровну времени.

18. Пусть $a_n = m$, тогда

$$a_{n+1} = (1+\sqrt{3}\,)m + \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

где ε — дробная часть числа $(1+\sqrt{3}\,)m + \frac{1}{2}$. Далее, число a_{n+2} получается из числа

$$(1+\sqrt{3}\,)a_{n+1} + \frac{1}{2} = (4+2\sqrt{3}\,)m + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon(1+\sqrt{3}\,) \qquad (1)$$

округлением. Как нетрудно видеть,

$$2a_n + 2a_{n+1} = (4+2\sqrt{3}\,)m + 1 - 2\varepsilon, \qquad (2)$$

причем мы знаем, что это число целое. Поэтому для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что число, заданное формулой (1), менее чем на 1 превосходит число, заданное формулой (2), т. е. что

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} + (1-\sqrt{3}\,)\varepsilon < 1.$$

Но это действительно так: правое неравенство очевидно, так как второе слагаемое отрицательно, а левое неравенство верно даже при $\varepsilon = 1$, поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} + (1-\sqrt{3}\,) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$.

20. Ответ: нет, это невозможно.

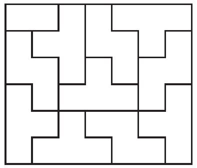
Решение 1. Графики упомянутых функций — прямые, причем среди этих прямых три пары параллельных. Но линия, параллельная диагонали четырехугольника, не может быть ни стороной, ни диагональю (в том числе, в невыпуклом четырехугольнике).

Решение 2. При пересечении прямых, содержащих стороны и диагонали некоторого четырёхугольника. на плоскости должно найтись четыре точки, в которых пересекается по три из этих прямых, и ещё не более трёх точек, в которых пересекаются по две прямые (точки пересечения противоположных сторон и точка пересечения диагоналей).

Для прямых из условия задачи имеются следующие точки, в которых пересекаются по две прямые: $(0, a)$, $(0, b)$, $(0, c)$. Причём эти точки различны (иначе у нас не получится шесть прямых). Также есть ещё три точки $(1, a+b)$, $(1, a+c)$ и $(1, b+c)$, через каждую из которых проходит по две прямые. Эти точки тоже должны быть разными: из совпадения двух точек (например если $a+b = a+c$) следует равенство двух из чисел a, b и c, чего быть не может. Итак, в конфигурации из условия задачи оказалось шесть точек, в которых пересекаются по две прямые, чего не должно быть у четырёхугольника с диагоналями.

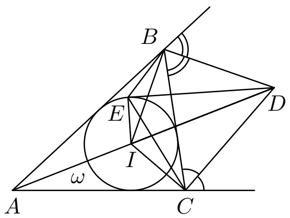
21. Ответ: наименьшее число кусков — 1100.

Оценка. Очевидно, все куски должны быть не более чем четырехклеточные. Значит, каждый прямоугольник 6×7 (его площадь равна 42) разрезан не менее чем на 11 кусков и тогда суммарное число кусков не меньше 1100.



Пример. Разрежем все прямоугольники на 11 кусков так, как показано на рисунке. В результате образуются четырехклеточные фигурки нужного вида, а также 100 прямоугольников 1×2 клетки, из которых нетрудно составить еще 50 фигурок.

22. Ответ: $\angle BEC = 111,5^\circ$.



Обозначим через I центр вписанной окружности. Биссектрисы внешних углов $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются в точке D — центре вневписанной окружности треугольника ABC, следовательно, точка D лежит на биссектрисе AI.

Заметим, что следующие углы, опирающиеся на отрезок ID, являются прямыми: $\angle IED$ — как угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания; $\angle IBD$, $\angle ICD$ — как углы между биссектрисами смежных углов. Таким образом, точки I, E, B, D, C лежат на одной окружности. Значит, $\angle BEC = \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

23. Решение 1 (терпеливое созерцание). Поскольку второе правило дает четный результат, в последовательности встречаются четные числа. К четным членам последовательности применяется первое правило, до тех пор, пока они не станут нечетными.

Итак, пусть a_n — нечетное. Если a_n дает остаток 1 при делении на 4, т.е. $a_n = 4k + 1$, то $a_{n+1} = 3a_n + 1 = 12k + 4$ делится на 4.

Пусть $a_n = 4k+3$. Последовательно находим: $a_{n+1} = 12k+10$, $a_{n+2} = 6k + 5$, $a_{n+3} = 18k + 16$, $a_{n+4} = 9k + 8$. При четном k число a_{n+3} делится на 4, значит, далее можно считать, что k нечетно.

Продолжим вычислять очередные члены последовательности, но систематизируем обозначения. Пусть $m = 2$. Мы обнаружили, что
$$a_{n+4} = 3^m k + (3^m - 1), \qquad (*)$$
причем k нечетно. Тогда a_{n+4} нечетно, подставим $k = 2k' + 1$ и продолжим вычисления:
$$a_{n+4} = 3^m \cdot 2k' + (2 \cdot 3^m - 1),$$
$$a_{n+5} = 3^{m+1} \cdot 2k' + (2 \cdot 3^{m+1} - 2).$$
Заметим, что при четном k' полученное число делится на 4, значит, далее можно считать, что k' нечетно. Продолжим:
$$a_{n+6} = 3^{m+1}k' + (3^{m+1} - 1).$$
Мы получили формулу, аналогичную $(*)$, и число k' здесь тоже нечетно. При этом $k' < k/2$.

Продолжая такие рассуждения, мы в конце концов обнаружим, что очередной член последовательности все-таки делится на 4, поскольку в противном случае натуральное число k будет неограниченно уменьшаться.

Решение 2 (остатки). Допустим, что ни в какой момент ни один член последовательности не делится на 4. Тогда чётные и нечётные числа в последовательности чередуются, и операции «разделить на 2» и «умножить на 3 и прибавить 1» тоже чередуются.

Пусть для определённости a_{2n} чётно, а a_{2n+1} нечётно при всех n. Докажем по индукции следующий факт: если за $2n$ операций мы так и не смогли ни разу получить число, кратное 4, то a_1 даёт остаток $2^n - 1$ при делении на 2^n

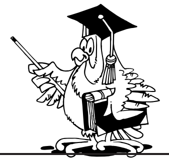
Из этого факта сразу следует, что $a_1 \geqslant 2^n - 1$. Но при больших n это неравенство не может быть выполнено, поэтому последовательность все-таки содержит числа, кратные 4.

Для краткости вычислений будем писать вместо остатка $2^n - 1$ остаток -1, вместо остатка $2^n - 2$ — -2, и т. д.

База очевидна: a_1 нечётно.

Переход. По предположению индукции a_3 даёт остаток -1 при делении на 2^{n-1}. Тогда $a_2 = 2a_3$ даёт остаток -2 при делении на 2^n. В самом деле, $a_3 = x \cdot 2^{n-1} - 1$, значит, $a_2 = 2a_3 = x \cdot 2^n - 2$.

Итак, $a_2 = 3a_1 - 1$ даёт остаток -2 при делении на 2^n, т. е. $3a_1$ имеет остаток -3. Тогда a_1 имеет остаток -1 при делении на 2^n — это следует из стандартной леммы об арифметике остатков.



Лемма. Пусть N и k взаимно просты. Тогда если ka и kb дают одинаковые остатки при делении на N, то a и b тоже дают одинаковые остатки при делении на N.

В самом деле, если $k(a-b)$ делится на N и k взаимно просто с N, то $a-b$ делится на N.

24. Ответ: можно. Например, можно в таблице справа произвольным образом поставить четные числа на клетки, помеченные плюсиком, а нечетные числа — в пустые клетки.

+	+	+	+	+	+	+	+	+
+		+		+		+		+
+	+	+	+	+	+	+	+	+
	+		+		+		+	
	+		+		+		+	

26. Ответ: таких чисел не существует.

Напомним читателю формулу, с помощью которой можно найти количество делителей числа. Если $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_k^{\nu_k}$ — разложение числа n на простые множители, то количество делителей числа n равно $(\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \ldots (\nu_k + 1)$.

Общие делители двух чисел a и b — это наибольший общий делитель чисел a и b и все его делители. Количество общих делителей a и b — это количество делителей числа НОД(a, b). Аналогичное утверждение верно для трех чисел.

Пусть $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, $c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}$. Тогда наибольшие общие делители, упомянутые в условии задачи, имеют вид:

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\tau_1} p_2^{\tau_2} \ldots p_k^{\tau_k},$$
$$\text{НОД}(a, c) = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_k^{\sigma_k},$$
$$\text{НОД}(a, b, c) = p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_k^{\rho_k},$$

где при всех i число ρ_i — это наименьшее из чисел α_i, β_i, γ_i; τ_i — меньшее из чисел α_i, β_i; σ_i — меньшее из чисел α_i, γ_i.

Отсюда следует *полезное наблюдение*: при всех i одно из чисел τ_i, σ_i (или даже оба) совпадает с ρ_i.

Допустим, что числа, описанные в условии задачи, существуют. Заметим, что 350 — количество общих делителей чисел a, b и c — делится на 7. Тогда в силу формулы для числа делителей один из множителей $\rho_i + 1$ делится на 7. Но тогда в силу полезного замечания одно из чисел $\tau_i + 1$, $\sigma_i + 1$ тоже делятся на 7, поэтому количество делителей НОД(a, b) или НОД(a, c) должно делиться на 7. Но 1000 и 720 не делятся на 7. Противоречие.

27. Ответ: длина второго отрезка равна $\frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{2}}$.

Очевидно, в условии задачи речь идет о двух отрезках длины 1, имеющих одну общую точку, скажем (u, v). Сдвинем график многочлена по горизонтали на u и по вертикали на v — эти действия соответствуют замене переменных $x \leftrightarrow (x - u)$ и изменению функции на константу $y(x) \leftrightarrow (y(x) - v)$. В результате единичные отрезки окажутся расположенными на оси OX, их общая точка станет началом координат, а поскольку при выполнении сдвигов старший коэффициент многочлена не изменился, мы получим график многочлена $y = x(x-1)(x+1)$.

При сдвиге прямая $y = x$ перешла в параллельную прямую, пусть она задается уравнением $y = x + s$. По условию график многочлена пересекает эту прямую в трех точках. Длина одного из отрезков равна $\sqrt{2}$, это значит, что x-координаты концов отрезка отличаются на 1, пусть эти координаты равны p и $p+1$ и пусть q — x-координата третьей точки пересечения. Тогда числа p, $p+1$ и q суть корни уравнения

$$x(x-1)(x+1) = x + s.$$

Преобразовав это уравнение к виду $x^3 - 2x - s = 0$, находим, что по теореме Виета

$$p + (p+1) + q = 0, \qquad p(p+1) + pq + (p+1)q = -2.$$

Из этих уравнений легко можно найти p и q: выразим q из первого уравнения и подставим во второе. Мы получим квадратное уравнение $3p^2 + 3p - 1 = 0$, из которого найдем p. Таким образом получаем две тройки чисел (расположим их по возрастанию).

Первая из них —

$$q_1 = -\frac{\sqrt{21}}{3}, \quad p_1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}, \quad p_1+1 = \frac{3+\sqrt{21}}{6},$$

здесь длина проекции искомого отрезка равна $p_1 - q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{21}-1)$. Вторая тройка чисел симметрична первой

График любого кубического многочлена — центрально-симметричен!

$$p_2 = \frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \quad p_2+1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}, \quad q_2 = -\frac{\sqrt{21}}{3}$$

и дает такой же ответ.

Осталось найденную длину проекции умножить на $\sqrt{2}$.

28. Числа в условии задачи связаны не слишком бросающимся в глаза соотношением:

$$9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2.$$

Проверим, что это соотношение означает ортогональность ребер AC и BD.

Рассмотрим треугольник ABD. Пусть AH — высота этого треугольника. Так как $AB = 6 > 2 = AD$, точка H расположена ближе к D, чем к B. По теореме Пифагора

$$BH^2 - HD^2 = (BA^2 - HA^2) - (DA^2 - DH^2) = BA^2 - DA^2 = 32.$$

Аналогично для высоты CH' треугольника BCD находим, что

$$BH'^2 - H'D^2 = 32.$$

Поскольку при движении точки H по лучу от середины отрезка BD в сторону точки D величина $BH^2 - HD^2$ меняется монотонно, мы заключаем, что $H = H'$. Это и значит, что $AC \perp BD$.

Развернем теперь тетраэдр так, чтобы диагонали AC и BD оказались горизонтальными, и посмотрим на тетраэдр сверху. Мы увидим фактически проекцию этого тетраэдра на горизонтальную плоскость — четырехугольник $ABCD$. Произведение $AC \cdot BD$ равно удвоенной площади этого четырехугольника. Грани тетраэдра при проектировании в эту плоскость дважды накрывают четырехугольник $ABCD$, поэтому площадь поверхности тетраэдра больше площади четырехугольника.

Впрочем, конец решения можно оформить, не опираясь на пространственное воображение. Заметим, что

$$S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{AH \cdot BD}{2} + \frac{CH \cdot BD}{2} = \frac{BD(AH+CH)}{2} > \frac{BD \cdot AC}{2}.$$

Аналогично устанавливается, что сумма площадей двух других граней также больше $AC \cdot BD/2$, чтд.