Решения задач олимпиады 2015/16 г.

29. Ответ: может. Например, так:

$$20 \to 39 \to 70 \to 135 \to 260 \to 510 \to 1010 \to 2016.$$

Есть много других способов.

30. Ответ: 112.

Заметим, что если число n четно, то количество чисел, меньших n, нечетно. Эти числа могут поровну распределиться по двум группам из 99 чисел, описанных в условии, только в том случае, когда одно из них стоит напротив числа n. Итак, напротив каждого четного числа должно стоять меньшее число.

Теперь ясно, что тогда напротив числа 2 обязательно стоит 1, потому что это единственное число, которое меньше 2. Далее, напротив 4 может стоять только 3 (ведь мы уже знаем, что числа 1 и 2 стоят напротив друг друга). Аналогично, напротив 6 стоит 5 и т. д. Продолжая аналогично, получим, что напротив числа 112 обязательно стоит 111.

31. Заметим, что рассматриваемое натуральное число должно быть четным. В самом деле, в противном случае все его делители нечетны, а само число равно сумме 18 нечетных делителей, т. е. все-таки четное.

Далее заметим, что среди 19 делителей, дающих в сумме наше число, должен быть хотя бы один четный (потому что сумма 19 нечетных чисел нечетна, и значит, не может быть равна нашему числу). Пусть этот четный делитель равен $2x$. Чтобы представить наше число в виде суммы 20 делителей, возьмем предыдущую сумму 19 делителей и заменим в ней $2x$ на $x + x$.

32. В течение первых 10 операций заведомо исчезнет зазор между левой стенкой и ближайшим к ней левым чемоданом. Действительно, либо этот «левый чемодан» будет в свой ход придвинут к стенке, либо если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером, то самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к стенке. В результате один из чемоданов — назовем его А — окажется стоящим вплотную к стенке и при последующих действиях кладовщика больше не будет двигаться.

В течение следующих 10 операций заведомо исчезнет зазор между чемоданом А и чемоданом, ближайшим к нему слева. Действительно, либо этот «ближайший слева чемодан» будет в свой ход придвинут к чемодану А, либо если в зазоре мог поместиться чемодан с меньшим номером (кроме чемодана А), то самый первый из таких чемоданов и будет поставлен вплотную к чемодану А. В результате чемодан А стоит вплотную к стенке, а вплотную к нему расположен еще один чемодан — назовем его Б, — причем при последующих действиях кладовщика оба чемодана больше не будут двигаться.

Продолжая эти рассуждения, мы получим, что после 30 операций у левого края стенки будут вплотную стоять уже три чемодана, после 40 операций — 4 чемодана и т. д. Наконец, после 100 операций все 10 чемоданов будут стоять слева на полке без зазоров. Перемещение чемоданов на этом завершится.

33. Для решения задачи полезно знать следующий факт, который мы для удобства сформулируем в терминах знакомства. *Не существует компании, состоящей из нечетного числа людей, в которой каждый человек имеет нечетное количество знакомых (среди людей из этой компании).*

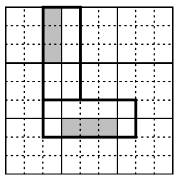
Доказательство. Пусть все знакомые пожмут друг другу руки. Так как в каждом рукопожатии участвует две руки, значит, суммарное количество «протянутых рук» четно. С другой стороны, каждый человек протягивал руку нечетное число раз, Чтобы суммарное число «протянутых рук» в этой ситуации получилось четным, число людей должно быть четным.

Приступим к решению задачи. Каждый мужчина в среду сказал правду, значит, у него нечётное число знакомых (поскольку среди них мужчин на 1 больше, чем женщин). А каждая женщина сказала правду в четверг, и по той же причине у неё нечётное число незнакомых.

Предположим, что на острове 2015 жителей. Тогда у каждого человека количество знакомы и количество незнакомых в сумме дают 2014 (четное число). Следовательно, у каждого человека количество знакомых имеет ту же четность, что и количество незнакомых.

Таким образом, у каждой женщины нечетное количество незнакомых и, следовательно, нечётное количество знакомых. В итоге получаем, что каждый из 2015 жителей, имеет нечётное число знакомых, чего быть не может.

34. Сначала нарисуем разметку, разбивающую исходный квадрат 60×60 на квадратики 3×3. Заметим, что у каждой плиточки 2×5 сторона длины 5 разбита этой разметкой либо на две части (их длины 2 и 3), либо на три части (с длинами 1, 3, 1). Следовательно, на каждой плиточке имеется прямоугольник 1×3, не подразбитый на части линиями разметки (на рисунке показаны примеры таких прямоугольников), — закрасим на каждой плиточке один такой прямоугольник.

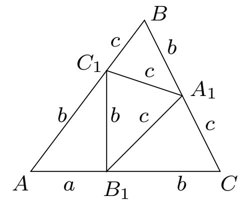


Очевидно, закрашенные прямоугольники не пересекаются, так как лежат в разных плиточках. Если в каком-то квадрате 3×3 закрашено больше одного прямоугольника 1×3, то они расположены одинаково (все горизонтально или все вертикально), поскольку не пересекаются. Следовательно, каждый квадрат разметки 3×3 можно так разбить на прямоугольники 1×3, что все закрашенные прямоугольники будут принадлежать этому разбиению, чтд.

35. Заметим, что число 2015 можно получить из чисел от 1008 до 1012. Если на предыдущем шаге было число, отличное от 1008, то из него можно было получить и 2016. Рассмотрим случай, когда на предыдущем шаге было число 1008. Это число мы могли получить из чисел от 505 до 509. Но из этих чисел мы могли получить также и 1009 (если вычесть на единицу

меньше), из которого можно получить и 2016.

36. Заметим, что треугольники BC_1A_1 и CA_1B_1 равны по трем сторонам, а значит, в них равны соответственные углы: $\angle C_1BA_1 = \angle A_1CB_1$. Тогда треугольник ABC равнобедренный, откуда $b+c = a+b$, то есть $a = c$.

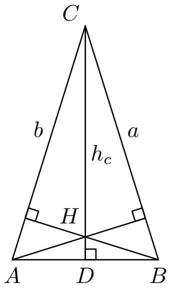


38. Сопоставим каждой раскраске некоторую другую (а может быть, и ту же самую) раскраску. Повернем доску на 90° и перекрасим каждую клетку в противоположный цвет. Тогда каждой ладейной раскраске будет сопоставлена обязательно неладейная (потому что в полученной раскраске можно по чёрным клеткам добраться с левой стороны доски до правой). Следовательно, ладейных раскрасок не более половины от общего числа раскрасок. Чтобы доказать, что ладейных раскрасок строго меньше, необходимо привести какую-нибудь неладейную раскраску, которая переходит в неладейную. В качестве такого примера подходит шахматная раскраска.

39. Решим более общую задачу. Пусть на доске написано несколько степеней двойки (степени четвёрки — частный случай), и пусть Андрюша задумал число A, которое делится на любое из чисел на доске, но меньше суммы этих чисел. Докажем, что можно подчеркнуть несколько чисел на доске, чтобы их сумма равнялась A.

Это утверждение будем доказывать индукцией по сумме написанных чисел. Если A совпадает с одним из написанных на доске чисел, то доказывать нечего. В противном случае сотрём наибольшее число на доске и вычтем это число из A. Полученный набор по-прежнему удовлетворяет условиям предыдущего абзаца, и мы можем применить предположение индукции.

40. Пусть ABC — остроугольный треугольник, a, b, c — длины его сторон BC, AC и AB соответственно треугольника, h_a, h_b, h_c — длины высот, проведённых к соответствующим сторонам. Если из высот можно составить треугольник, то задача решена. Пусть одна высота не короче суммы двух других, для определенности $h_c \geqslant h_a + h_b$. Обозначим через H точку пере-



сечения высот с длинами h_a и h_b (семиклассники могут еще не знать, что все три высоты пересекаются в одной точке, но нам это и не понадобится).

Первый треугольник составим из стороны c и высот h_a и h_b. Почему он составляется из этих отрезков? Во-первых, c — самый длинный из них (наклонная длиннее перпендикуляра). Кроме того, $c < AH + HB < h_a + h_b$, поэтому из этих отрезков можно составить треугольник.

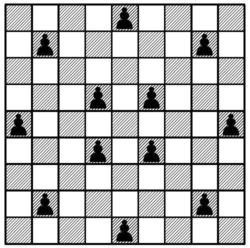
Докажем, что и из остальных трех отрезков мы сможем составить треугольник. Заметим, что h_c — наименьший из них. Пусть точка D — основание высоты h_c. Тогда $a < h_c + BD$. Но $BD < c < BH + HA < h_a + h_b \leqslant h_c < b$, и поэтому $a < h_c + b$. Аналогично $b < h_c + a$, и значит, из отрезков a, b и h_c тоже можно составить треугольник.

41. Ответ: 13 ходов.

Пример. Разместим в квадрате 12 доминошек, попарно не имеющих общих соседних клеток (см. левый рис.). Старшина последовательно указывает на них, а в конце еще на одну произвольную доминошку.

Оценка. Окрасим клетки квадрата в шахматном порядке так, чтобы углы оказались черными. Пусть каждый раз уходит солдат с белой клетки. Несложно указать 12 черных клеток, соседних со всеми белыми (см. правый рис.). Когда уйдет 13 белых солдат, у солдата, стоящего на одной из этих черных клеток, уйдет два соседа и процесс прекратится.

7			6	6			5	5
7								
		12			11	11		
		12						4
8								4
8						10		
		9	9			10		
								3
1	1			2	2			3



42. Ответ: нет.

В среду каждый мужчина сказал правду, значит, у него нечетное количество знакомых. В четверг каждая женщина сказала правду, значит тоже нечетное количество знакомых. Таким образом, у каждого жителя острова нечетное количество знакомых. Поэтому количество жителей острова не может быть нечетным. (Доказательство последнего утверждения приведено в решении задачи 33.)

43. Решение 1 (разность квадратов). Заметим, что

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = (x + y - \sqrt{xy})(x + y + \sqrt{xy}).$$

Поскольку $x+y \geqslant 2\sqrt{xy} \geqslant \sqrt{xy}$, достаточно проверить неравенство

$$x + y + \sqrt{xy} \leqslant 3(x + y - \sqrt{xy}).$$

После приведения подобных членов его можно записать в виде $2(x+y) \geqslant 4\sqrt{xy}$, в котором оно очевидно.

Решение 2. Раскроем скобки в правой части неравенства:

$$x^2 + xy + y^2 \leqslant 3x^2 + 3xy + 3y^3 - 6x\sqrt{xy} - 6y\sqrt{xy} + 6xy.$$

Приведем подобные слагаемые и перенесем радикалы в левую часть и сократим на 2:

$$3x\sqrt{xy} + 3y\sqrt{xy} \leqslant x^2 + 4xy + y^2.$$

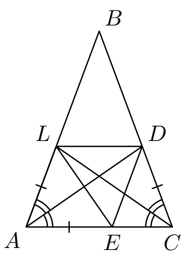
Далее заметим, что выражения в обеих частях неравенства неотрицательны, поэтому мы можем возвести их в квадрат:

$$9x^3y + 18xy + 9xy^2 \leqslant x^4 + 16xy + y^4 + 8x^3y + 8xy^3 + 2xy.$$

Полученное неравенство, в свою очередь, приводится к виду $x^3y + xy^3 \leqslant x^4 + y^4$. Что безусловно верно, в силу того, что

$$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 = x^3(x-y) - y^3(x-y) = (x^3 - y^3)(x-y) \geqslant 0$$

(в последнем выражении обе скобки имеют одинаковый знак).



44. Проведем биссектрису CL угла ACB. Так как треугольник ABC равнобедренный, то $AL = DC = AE$, из чего получаем, что треугольник ALE тоже является равнобедренным. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, тогда $\angle ALE = \angle AEL = 90^\circ - \alpha$. Кроме того,

$$BL = BA - LA = BC - DC = BD,$$

откуда $LD \parallel AC$. В силу данной параллельности, $\angle LDA = \angle DAE = \alpha = \angle LAD$, и треугольник ALD — равнобедренный.

Таким образом, в четырехугольнике $ALDE$ стороны LD и AE равны и параллельны, следовательно, $ALDE$ — параллелограмм, но $AL = AE$, следовательно, $ALDE$ — ромб. По свойству ромба EL является биссектрисой угла AED, т. е. точки L и F совпадают. Как мы уже знаем, $\angle ALE = \angle DLE$, чтд.

46. Ответ: да, такое возможно.

Докажем по индукции, что такая ситуация возможна для любого числа строк, причем числа в каждой строке у нас будут идти в порядке возрастания.

База для одной строки тривиальна. Переход. Пусть уже выписано n строк и в самой верхней стоят числа $a, a+1, \ldots, a+99$. Пусть $N > a + 99$. Тогда при $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 99$ число $N! + a + i$ делится на $a+i$. Значит, если мы поверх первой строки запишем числа $N! + a, N! + a + 1, \ldots, N! + a + 99$, получится пример для $n + 1$ строки. Индукционный переход доказан.

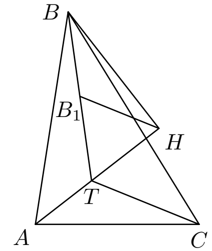
47. Ответ: $n = 157$. Такое значение n получается, если чемоданы одинаковой ширины стоят вплотную друг к другу в порядке 13, 12, 11, …, 2, 1 (слева направо), причем между 13-м чемоданом и краем полки слева есть небольшой зазор.

Динамика движения чемоданов (для случая 10 чемоданов) подробно описана в решении задачи 32. В нашем случае каждые 13 операций группа чемоданов, стоящих подряд у левого края полки, будет увеличиваться на один чемодан.

Для удобства разобьем все операции на группы по 13 последовательных операций, каждую такую группу операций будем называть этапом. В приведенном примере после выполнения

$156 = 12 \cdot 13$ операций (12 этапов) чемоданы с номерами от 13 до 2 будут стоять у левого края полки вплотную, а чемодан номер 1 будет отделен зазором от чемодана 2. После 157-й операции первый чемодан будет придвинут ко второму, и движение чемоданов закончится.

В общем случае, после выполнения 156 ходов «сплошная» группа чемоданов, стоящих вплотную к левому краю полки, будет состоять не менее чем из 12 чемоданов. Если в этой группе 13 чемоданов (т. е. все), то движение чемоданов уже закончилось. Если же в группе 12 чемоданов, то последний чемодан, отделенный от этой группы зазором, должен иметь номер 1. Действительно, если бы это был не первый чемодан, то первый чемодан уже придвинут к «сплошной» группе во время выполнения операций какого-то этапа, и осталось заметить, что в течение того же самого этапа к сплошной группе должен был быть придвинут еще один чемодан. Но тогда после 12-го этапа все чемоданы уже окажутся в сплошной группе.



48. Решение 1 (геометрическое). Пусть B_1 — середина отрезка BT. На продолжении отрзка AT за точку T отметим такую точку H, что $TH = TB_1$. Тогда

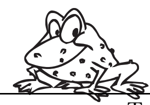
$$\angle THB_1 = \angle TB_1H = \frac{\angle ATB_1}{2} = 60^\circ.$$

Следовательно, $HB_1 = TB_1 = B_1B$. Тогда

$$\angle BHB_1 = \angle B_1BH = \frac{\angle TB_1H}{2} = 30^\circ.$$

Стало быть, $\angle BHA = \angle BHB_1 + \angle BHT = 90^\circ$. Поскольку перпендикуляр короче наклонной,

$$AB > AH = AT + TH = \\ = AT + B_1T = AT + \frac{BT}{2}.$$



Эванджелиста Торричелли (1608–1647). Итальянский математик и физик. Точка T из этой задачи называется его именем

Аналогично установим неравенства

$$AC > AT + \frac{CT}{2} \quad \text{и} \quad BC > BT + \frac{CT}{2}.$$

Осталось сложить полученные неравенства и умножить на 2:

$$\begin{aligned}&2AB+2BC+2CA>\\&\qquad>2\Big(AT+\frac{BT}{2}\Big)+2\Big(BT+\frac{CT}{2}\Big)+2\Big(AT+\frac{CT}{2}\Big)=\\&\qquad=4AT+3BT+2CT.\end{aligned}$$

Р е ш е н и е 2 (теорема косинусов). Положим для краткости $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AT=x$, $BT=y$ и $CT=z$. По теореме косинусов

$$a^2=y^2+z^2-yz\cos 120^\circ=y^2+z^2+yz=\Big(y+\frac{z}{2}\Big)^2+\frac{3z^2}{4}\geqslant\Big(y+\frac{z}{2}\Big)^2.$$

Следовательно, $a\geqslant y+\frac{z}{2}$. Аналогично установим неравенства

$$b\geqslant x+\frac{z}{2}\quad\text{и}\quad c\geqslant x+\frac{z}{2}.$$

Осталось сложить полученные неравенства и умножить на 2:

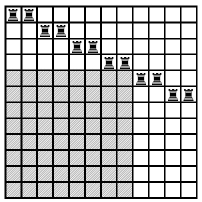
$$2a+2b+2c\geqslant 2\Big(y+\frac{z}{2}\Big)+2\Big(x+\frac{z}{2}\Big)+2\Big(x+\frac{z}{2}\Big)=4x+3y+2z.$$

49. Пусть

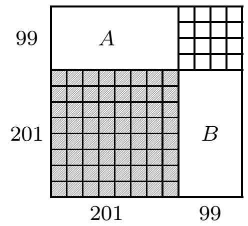
$$f(x)=\alpha x^2+\beta_1x+\gamma_1,\ \ g(x)=\alpha x^2+\beta_2x+\gamma_2,\ \ h(x)=\alpha x^2+\beta_3x+\gamma_3.$$

Заметим, что если $\beta_2x_0+\gamma_2=\beta_3x_0+\gamma_3$, то $g(x_0)=h(x_0)$. Поэтому при $x_0=\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\beta_3-\beta_2}$ равенство $g(x_0)=h(x_0)$ будет выполнено. Но тогда $g(x_0)\neq 0$, поскольку по условию трехчлен $g(x)$ не имел корней. Следовательно, при $c=-f(x_0)/g(x_0)$ имеем $f(x_0)+cg(x_0)=0$. Но тогда и $f(x_0)+ch(x_0)=0$.

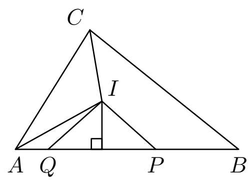
50. О т в е т: при $k=201$.



П р и м е р. Поставим ладей в клетки с координатами $(k,2k-1)$ и $(k,2k)$ при $1\leqslant k\leqslant 150$. Расстановка для доски 12×12 показана на рисунке. Тогда в квадрате 200×200, примыкающем к левому нижнему углу, не найдется ни одной ладьи.



О ц е н к а. Предположим, что для некоторой расстановки ладей нашелся квадрат 201×201, в котором нет ни одной ладьи. Переставим строки и столбцы доски таким образом, чтобы это был левый нижний квадрат. Рассмотрим часть A сверху от этого квадрата. В этой части 99 строк, в каждой из которых не более двух ладей. Значит, всего в части A не более 198 ладей, а поскольку эта часть занимает 201 столбец, существует столбец, пересекающий часть A, в котором не стоит ни одной ладьи. Аналогично существует строка, пересекающая часть B, в которой нет ни одной ладьи. Тогда клетка на пересечении этого столбца и этой строки не бьется ладьями, что противоречит условию.



51. Отметим на биссектрисе угла C точку I — точку пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $AC=AP$ и $\angle CAI=\angle PAI$, поэтому треугольники ACI и API равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $IP=IC$ и $\angle API=\angle ACI=\frac{1}{2}\angle ACB$. Аналогично доказывается, что $IQ=IC$. Стало быть, $IP=IQ$ и точка I лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ. Но тогда она совпадает с точкой R, поскольку является точкой пересечения тех же прямых. Тогда

$$\angle PRQ=\angle PIQ=180^\circ-2\angle API=180^\circ-\angle ACB.$$

52. Р е ш е н и е 1 (полная система вычетов). Пусть p — меньшее из простых чисел. Тогда $p<q<2p$. Рассмотрим целые числа от $-\frac{p-1}{2}$ до $\frac{p-1}{2}$. Это p последовательных чисел, поэтому все они дают различные остатки при делении на p. Умножим теперь эти p чисел на q. Покажем, что числа в новом наборе также будут давать различные остатки при делении на p. Если qa и qb (при $a<b$) дают одинаковые остатки при делении на p, то натуральное число $qb-qa=q(b-a)$ делится на p, а значит, и $b-a$ делится на p, что невозможно, ибо $b-a$ положительно и меньше p. Итак, числа в новом наборе дают различные

остатки при делении на p. Но поскольку их всего p, среди них найдется число, дающее остаток $p-1$. Следовательно, мы доказали, что существует такое число k, что $qk+1$ делится на p и $|k| \leqslant \frac{p-1}{2}$. Тогда

$$|qk+1| \leqslant q|k|+1 \leqslant 2p \cdot \frac{p-1}{2}+1 = p(p-1)+1 < p^2.$$

Поэтому число $qk+1$ не может иметь простых делителей, больших p, ибо произведение такого делителя с p уже больше, чем p^2 и тем более больше, чем $qk+1$.

Если $k \geqslant 0$, то нам подойдут числа qk и $qk+1$. В противном случае нам подойдут числа $-qk$ и $-qk-1$.

Решение 2 (китайская теорема об остатках). Пусть p — меньшее из простых чисел. По китайской теореме об остатках найдется такое число a, которое делится на q и дает при делении на p остаток 1. Заметим, что любое число вида $a-kpq$ при целом k также удовлетворяет этому условию. Подберем k так, что $0 < a-kpq < pq$. Тогда число $b = a-kpq$ делится на q и результат деления меньше p, поэтому наибольший простой делитель q равен p. Кроме того, $b-1$ делится на p, поэтому если $b-1 \leqslant p^2$, то наибольший простой делитель $b-1$ равен p и мы нашли требуемые числа. Пусть $b-1 > p^2$. Тогда рассмотрим натуральное число $c = pq-b$. Оно делится на q и результат деления меньше p, поэтому наибольший простой делитель c равен q. Кроме того $c+1 = pq-(b-1) < pq-p^2$, число $c+1$ делится на p и частное не превосходит $q-p < p$. Поэтому наибольший простой делитель $c+1$ равен p и мы нашли требуемые числа.

Решение 3 (линейное представление наибольшего общего делителя). Пусть p — меньшее из простых чисел. Поскольку p и q взаимно просты, существуют такие числа a и b, что $ap+bq=1$. Но тогда $(a-kq)p+(b+kp)q=1$ при любом целом k. Подберем k так, что $0 < a-kq < q$. Тогда число $(a-kq)p-1$ делится на q и меньше pq. Поэтому у него нет простых делителей, больших q. Если $a-kq$ не имеет простых делителей, больших p, то мы нашли требуемую пару чисел: $(a-kq)p-1$ и $(a-kq)p$. В противном случае заметим, что $0 < kq+q-a < q$ и $(kq+q-a)p+(-kp-p-b)q=-1$. Тогда

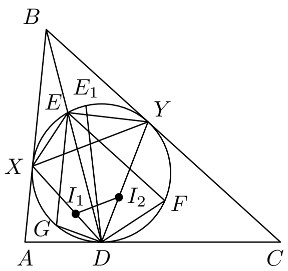
число $(kq+q-a)p+1$ делится на q и не превосходит pq. Поэтому у него нет простых делителей, больших q. Если $kq+q-a$ не имеет простых делителей, больших p, то мы нашли требуемую пару чисел: $(kq+q-a)p$ и $(kq+q-a)p+1$. Если же требуемая пара чисел еще не найдена, то числа $a-kq$ и $kq+q-a$ имеют простые делители, большие p, а, значит, $q = (a-kq)+(kq+q-a) > 2p > q$. Противоречие.

53. Ответ: Выигрывает Костя.

Назовем *полоской* идущие подряд белые клетки, окруженные черными клетками или краями полоски, а *доминошкой* назовем полоску из двух клеток. Опишем стратегию Кости. Он каждым своим ходом (пока такое возможно) будет закрашивать две соседние белых клетки так, чтобы образовалась одна доминошка. Покажем, что после каждого ответного хода Сергея количество доминошек будет не меньше, чем количество полосок нечетной длины. Действительно, после хода Кости количество полосок нечетной длины не меняется, поскольку он от какой-то полоски «отрезает» четыре клетки: две клетки он закрашивает и еще создает одну доминошку. Сергей же своим ходом не может «испортить» ни одной доминошки, а количество полосок нечетной длины он может увеличить не более чем на 1. Действительно, он может лишь сделать две новых полоски из одной старой, причем если они обе имеют нечетную длину, то старая полоска также имела нечетную длину, ведь Сергей закрасил на ней одну или три клетки.

Рассмотрим теперь момент, начиная с которого Костя не может действовать по изначальному плану. Из любой полоски длины 6 и более Костя может сделать новую доминошку, также он может сделать доминошку и из полоски длины 4. Тогда в рассматриваемый момент помимо доминошек остались лишь полоски длины 3 и 5 (полоски длины 1 запрещены по условию), причем этих полосок не больше, чем доминошек. Дальнейшая стратегия Кости такова: он закрашивает одну из доминошек. Сергей ответным ходом должен либо закрасить одну полоску длины 3, либо из полоски длины 5 сделать одну или две доминошки (закрасив в ней одну или три клетки). После такой пары ходов количество доминошек по-прежнему будет не меньше, чем количество полосок нечетной длины. Поэтому игра может закончиться, лишь когда не осталось полосок нечетной длины. Это может случиться лишь после хода Сергея. Если при этом остались доминошки, то Костя еще сможет сделать ход, а Сергей уже нет. Если же доминошек также не осталось, то Костя выиграл, поскольку все клетки закрашены.

54. Пусть X и Y — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и BC соответственно, а точки I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников EGD и EFD. Несложно показать, что касательная, параллельная хорде, проходит через середину дуги, которую стягивает хорда. Из чего следует, что точка X лежит на прямой DI_1, а точка Y — на прямой DI_2. По свойству касательной $\angle XDB = \angle BXE$, поэтому треугольники BXE и BDX подобны и имеет место равенство $EX : XD = BX : BD$. И по аналогичным соображениям $BY : BD = EY : YD$. Но $BX = BY$, а значит,



$$EX : XD = EY : YD. \qquad (*)$$

Далее заметим, что по лемме Мансиона $XE = XI_1$ и $EY = YI_2$. Подставляя в последнее равенство, получаем, что

$$XI_1 : XD = YI_2 : YD,$$

откуда $XY \parallel I_1I_2$.

Теперь мы можем доказывать, что биссектриса угла GDF делит пополам отрезок XY, и это будет равносильно утверждению задачи.

Пусть еще $\angle GDX = \angle XDE = \alpha$, $\angle EDY = \angle YDF = \beta$, и биссектриса угла GDF пересекает вторично вписанную в треугольник ABC окружность в точке E_1. Тогда

$$\angle GDE_1 = \angle E_1DF = \alpha + \beta \qquad \text{и} \qquad \angle YDE_1 = \alpha.$$

В силу последнего равенства, дуги, а значит, и хорды, EX и E_1Y равны, и $E_1X = EY$. Подставляя эти равенства в $(*)$, получаем $E_1Y : XD = E_1X : YD$, т. е. $E_1Y \cdot YD = E_1X \cdot XD$.

Домножая последнее равенство на $\sin\angle E_1YD = \sin\angle E_1XD$, получаем равенство площадей $S_{E_1YD} = S_{E_1XD}$, что, очевидно, возможно только в том случае, когда DE_1 делит XY пополам.

55. Ответ: для всех четных $N \geqslant 4$.

Решение 1 (делимость). Пусть блок $k+1$, $k+2$, $k+3$, ..., $k+N$ оказался хорошим. Сумма всех чисел этого блока равна $kN + \frac{N(N+1)}{2}$. Предположим, что произведение $(k+a)(k+b)$ (где $1 \leqslant a \neq b \leqslant N$) делится на сумму остальных чисел блока, т. е. на $s = k(N-2) + \frac{N(N+1)}{2} - a - b$. Рассмотрим наибольший общий делитель чисел $k+a$ и s:

$$\text{НОД}(k+a, s) = \text{НОД}\Big(k+a, s-a-b-(N-2)(k+a)\Big) = \\ = \text{НОД}\Big(k+a, \frac{N(N+1)}{2} - (N-1)a - b\Big).$$

Если $(N-1)a + b \neq \frac{N(N+1)}{2}$, то

$$\text{НОД}(k+a, s) = \text{НОД}\Big(k+a, \frac{N(N+1)}{2} - (N-1)a - b\Big) \leqslant \\ \leqslant \left|\frac{N(N+1)}{2} - (N-1)a - b\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{N(N+1)}{2} + (N-1)a + b \leqslant 2N^2.$$

Аналогично, если $(N-1)b + a \neq \frac{N(N+1)}{2}$, то $\text{НОД}(k+b, s) \leqslant 2N^2$. Но тогда

$$kN + \frac{N(N+1)}{2} - a - b = s = \text{НОД}\big((k+a)(k+b), s\big) \leqslant \\ \leqslant (2N^2)^2 = 4N^4,$$

что невозможно при больших k, например, при $k > 4N^4$. Следовательно, при больших k либо $(N-1)a + b = \frac{N(N+1)}{2}$, либо $(N-1)b + a = \frac{N(N+1)}{2}$. Рассмотрим первый случай. Поскольку $2(N-1)a + 2b = N(N+1)$, число $2(b-a)$ делится на N. По условию $0 < |b-a| < N$ и, значит, $b-a$ не делится на N. Тогда $2|b-a| = N$ и число N четно.

Пусть $N = 2n$ и $a < b$. Тогда $1 \leqslant a < b \leqslant 2n$ и $b = a + n$. Возьмем $a = n$. Тогда $(k+n)(k+2n)$ должно делиться на

$$s = k(2n-2) + n(2n+1) - a - b = (k+n)(2n-2).$$

То есть $k + 2n$ должно делиться на $2n - 2$. Это бывает, когда $k = 2n + (2n-2)m$. Стало быть, все четные N подходят.

Решение 2. Пусть $N = 2n$. Рассмотрим блок, состоящий из чисел $k-n$, $k-n+1$, ..., $k+n-1$. Их сумма равна $2nk-n$, а сумма всех этих чисел, кроме k и $k-n$, равна $2(n-1)k$. Тогда число $k(k-n)$ делится на $2(n-1)k$, если $k-n$ делится на $2(n-1)$. Это выполнено при $k = 2m(n-1)+n$ при любом натуральном m. Таким образом, для четного N мы построили бесконечно много хороших блоков.

Покажем теперь, что для $N = 2n+1$ существует лишь конечное число хороших блоков из N чисел. Пусть блок $k-n$, $k-n+1$, $k-n+2$, ..., $k+n$ оказался хорошим. Мы убедимся, что при достаточно больших k это невозможно. Сумма всех чисел этого блока равна $(2n+1)k$. Предположим, что произведение чисел $k+r_1$ и $k+r_2$ ($|r_1|, |r_2| \leqslant n$ и $r_1 \neq r_2$) делится на сумму оставшихся чисел блока. Тогда число

$$A = \frac{(k+r_1)(k+r_2)}{(2n+1)k - (k+r_1) - (k+r_2)} = \frac{k^2 + (r_1+r_2)k + r_1r_2}{(2n-1)k - (r_1+r_2)} = \\ = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{k + r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{k}}{1 - \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}}$$

является натуральным. Значит, число

$$B = (2n-1)A = \frac{k + r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{k}}{1 - \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}}$$

тоже натуральное. Разберем несколько случаев.

1) Если $r_1 + r_2 = 0$ (при этом $r_1r_2 \neq 0$, так как $r_1 \neq r_2$), то уже при $k > n^2$ число $B = k + \frac{r_1r_2}{k}$ нецелое.

2) Пусть $r_1 + r_2 = 2n-1$. При наших ограничениях на r_1, r_2 это возможно, лишь при $\{r_1, r_2\} = \{n-1, n\}$, тогда $r_1r_2 = n^2 - n$ и

$$B = \frac{k^2 + (2n-1)k + n^2 - n}{k-1}.$$

По модулю $k-1$ числитель дроби равен $1 + (2n-1) + n^2 - n = n^2 + n$. При больших k это ненулевой остаток по модулю $k-1$, и значит, число B нецелое.

3) Пусть $r_1 + r_2 = -(2n-1)$. Тогда аналогично $\{r_1, r_2\} = \{-n+1, -n\}$, $r_1r_2 = n^2 - n$ и

$$B = \frac{k^2 - (2n-1)k + n^2 - n}{k+1}.$$

По модулю $k+1$ числитель дроби равен $1 + (2n-1) + n^2 - n = n^2 + n$. При больших k это ненулевой остаток по модулю $k+1$, и значит, число B опять нецелое.

4) Пусть $r_1 + r_2 \neq 0$, $r_1 + r_2 \neq \pm(2n-1)$. В следующих рассуждениях мы воспользуемся тем, что при больших k знаменатель дроби, задающей число B, очень близок к 1. Заметим, что при $|x| < \frac{1}{2}$

$$0 \leqslant \frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{x^2}{1-x} \leqslant 2x^2.$$

Взяв $x = \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}$, получаем

$$0 \leqslant \frac{1}{1 - \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}} - 1 - \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k} \leqslant \frac{2(r_1+r_2)^2}{(2n-1)^2k^2} \leqslant \frac{2}{k^2}.$$

Следовательно, для некоторого $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$

$$\frac{1}{1 - \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k}} = 1 + \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k} + \frac{2\varepsilon}{k^2}.$$

Подставим это равенство в выражение для B:

$$B = \left(k + r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{k}\right)\left(1 + \frac{r_1+r_2}{(2n-1)k} + \frac{2\varepsilon}{k^2}\right) = \\ = k + r_1 + r_2 + \frac{r_1+r_2}{2n-1} + \frac{r_1r_2}{k} + \frac{(r_1+r_2)^2}{(2n-1)k} + \frac{2\varepsilon}{k} + \\ + \frac{2\varepsilon(r_1+r_2)}{k^2} + \frac{(r_1+r_2)r_1r_2}{(2n-1)k^2} + \frac{2\varepsilon(r_1+r_2)r_1r_2}{k^3}.$$

Рассмотрим слагаемые, начиная с пятого. Все их числители ограничены по модулю, например, числом $10n^3$, а знаменатели не меньше чем k. Поэтому при $k > 60n^5$ их сумма меньше $\frac{1}{n^2}$.

Это означает, что число $k+r_1+r_2+\frac{r_1+r_2}{2n-1}$ отличается от целого числа B менее чем на $\frac{1}{n^2}$. Но это невозможно, поскольку оно нецелое со знаменателем, не превосходящим $2n-1$, и значит, отличается от целого числа не менее чем на $\frac{1}{2n-1}$.

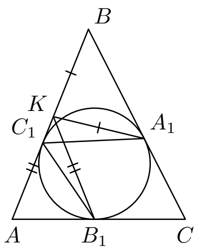
Докажите, что при $N = 2n$ и больших k лишь произведение чисел $k+1$ и $k+n+1$ или произведение чисел $k+n$ и $k+2n$ может делиться на сумму оставшихся.

56. Ответ: $n = 1$ или $n = 2$.

Пусть Сашино число имеет делители $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_k = n$. Заметим, что число $n+1$ взаимно просто со всеми этими делителями, поэтому число $(d_0+1)(d_2+1)\ldots(d_{k-1}+1)$ должно делиться на $d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$. При этом $d_1 \leqslant d_0+1$, $d_2 \leqslant d_1+1$ и так далее $d_k \leqslant d_{k-1}+1$. Перемножив эти неравенства, получим, что делимое не превосходит своего делителя, а это возможно только в том случае, когда все неравенства обращаются в равенства. Но тогда $n = d_k = d_{k-1}+1$, т.е. n делится на $d_{k-1} = n-1$. Значит, либо $n = 2$, либо числа d_{k-1} не существует и $n = 1$.

57. Докажем, что нам подойдет последовательность, заданная формулой $y_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Монотонность этой последовательности очевидна. Далее, $y_k \geqslant x_k$, так как x_k содержится в множестве по которому берется максимум, и при этом $y_k = x_j$ для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant k)$, значит, по условию, $y_k \leqslant 2x_k$.

58. Обозначим через C_1 точку касания вписанной окружности со стороной AB, пусть $\angle BAC = 2\alpha$ и $\angle ABC = 2\beta$. Тогда



$$\angle AB_1C_1 = \angle AC_1B_1 = 90^\circ - \alpha$$

и

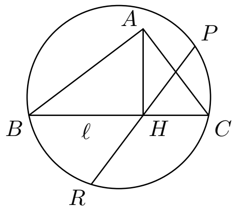
$$\angle C_1A_1B = \angle A_1C_1B = 90^\circ - \beta,$$

в силу того, что $B_1A = AC_1$ и $A_1B = BC_1$ как отрезки касательных. Также нетрудно подсчитать, что $\angle AKB_1 = 180^\circ - 4\alpha$ и $\angle BKA_1 = 180^\circ - 4\beta$. Далее заметим, что точка K лежит либо вне описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, либо на этой окружности, поэтому $\angle B_1C_1A_1 \geqslant \angle B_1KA_1$. Мы знаем, чему равны углы, смежные к данным, поэтому легко можем вычислить и их самих: $\alpha+\beta = \angle B_1C_1A_1 \geqslant \angle B_1KA_1 = 4\alpha+4\beta-180^\circ$, то есть $60 \geqslant \alpha+\beta$. Откуда получаем неравенство $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta \geqslant 60^\circ$.

59. Пусть θ — одна из допустимых раскрасок квадрата, а именно, та, в которой левый верхний и правый нижний квадраты 50×50 (назовём их ЛВ, ПН) полностью черные, а два других, ЛН и ПВ, — белые. Поскольку операции обратимы, достаточно научиться из любой допустимой раскраски получать раскраску θ. А для этого, в свою очередь, достаточно научиться в любой допустимой раскраске $\tau \neq \theta$ увеличивать число квадратов, раскрашенных так же, как в θ.

Предположим, что это невозможно. Если в раскраске τ все клетки в ЛВ и ПН чёрные, мы могли бы перекрасить все прочие черные клетки в белый цвет и получить раскраску θ. Значит, τ содержит белые клетки в ЛВ, ни одну из которых нельзя перекрасить. Тогда каждая из этих белых клеток лежит либо в предельно черной строке (т. е. в строке, содержащей 60 черных клеток), либо в предельно черном столбце.

Пусть в ЛВ имеется k предельно черных строк, содержащих a белых клеток. Всего в этих строках $60k$ черных клеток, из них $50k - a$ клеток находятся в ЛВ, значит, остальные $10k + a$ черных клеток расположены в ПВ. Ни одну из них тоже не перекрасить — это может быть лишь потому, что каждая стоит в столбце, содержащем 50 черных и 50 белых клеток. Так как в этих столбцах есть не менее $10k + a$ черных клеток в ПВ, они содержат хотя бы $10k+a$ белых клеток в ПН. (Эти клетки тоже нельзя перекрасить — потому, что они находятся в предельно черных строках.) Получается, что в ПН больше белых клеток, чем в ЛВ. Аналогично наоборот. Противоречие.



60. Опустим из точки A перпендикуляр на прямую ℓ. Пусть H — основание этого перпендикуляра. Зафиксируем какой-нибудь треугольник ABC и обозначим через R вторую точку пересечения прямой PH с описанной окружностью треугольника PBC. Тогда степень точки H относительно этой окружности равна $BH \cdot HC = PH \cdot HR$. Кроме того, $AH^2 = BH \cdot HC$ по свойству высоты в прямоугольном треугольнике. Следовательно, длина отрезка HR не зависит от выбора треугольника. Заметим к тому же, что точка H всегда лежит на отрезке BC, т. е. внутри описанной окружности PBC, а значит, точки R и P всегда будут лежать в разных полуплоскостях относительно прямой ℓ. Таким образом, описанная окружность любого треугольника PBC должна пересекать прямую PH в точке, удаленной от P на AH^2/PH, и лежащей на заданном луче этой прямой. Очевидно, что такая точка определяется однозначно, поэтому все описанные окружности через нее и проходят.

61. Определим для ориентированной замкнутой ломаной на плоскости *число поворота* следующим образом: пустим по ней лягушку, в каждой вершине она повернет на некоторый угол от $-\pi$ до π (положительным считаем поворот против часовой стрелки). Сумма углов поворота кратна 2π (поскольку по модулю 2π каждый угол поворота есть разность углов направлений звеньев в соответствующей вершине, а такая сумма разностей телескопически сокращается.) Частное назовём числом поворота, это целое число.

Например, если ломаная несамопересекающаяся, число поворота равно ± 1. Это интуитивно понятное утверждение можно доказать индукцией, подразбивая ломаную и следя за изменением чисел поворота.

Пусть на плоскости нарисовано n замкнутых ломаных общего положения: никакие три прямые, содержащие их звенья, не пересекаются в одной точке, никакие две вершины не совпадают и никакие три не лежат на одной прямой. Обозначим через $r_1, \ldots, r_n$ числа поворотов этих ломаных, а через x — общее число точек пересечения звеньев этих ломаных, включая самопересечения.

У т в е р ж д е н и е. Число $y = r_1 + \ldots + r_n + n + x$ четно.

При $n = 1$ для ломаной из условия задачи получаем требуемое: в самом деле, если все углы вписанной ломаной тупые, то она всегда поворачивает в одном направлении, а тогда сумма углов поворота равна $100 \cdot \pi$ минус сумма углов, что кратно 4π. Поэтому число поворота чётно, а x — нечетно, чтд.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения может быть проведено индукцией по числу точек пересечения. Если звенья AB и CD пересекаются в точке P, отметим на соответствующих отрезках PA, PB, PC, PD точки A_1, B_1, C_1, D_1 достаточно близко к P и заменим отрезки A_1B_1, C_1D_1 на A_1C_1, B_1D_1. Величина x уменьшится на 1, число ломаных изменится на 1, а сумма поворотов не изменится. Таким образом, четность величины y не изменится. Так мы сведём утверждение к случаю, когда ломаные не имеют точек пересечения, т. е. $x = 0$, $r_i = \pm 1$.

62. Нам понадобится следующая стандартная

Л е м м а. Предположим, что A, B — вещественные числа, причём $A \neq \pm 1$, и многочлен $P(x)$ степени $k > 0$ удовлетворяет равенству $P(Ax + B) = A^k P(x)$. Тогда $P(x) = \alpha(x - x_0)^k$, где $x_0 = -B/(A - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $Q(x) = P(x + x_0)$. Тогда

$$Q(Ax) = P(Ax+x_0) = P(A(x+x_0)+B) = A^k P(x+x_0) = A^k Q(x).$$

Приравнивая в полученном уравнении $Q(Ax) = A^k Q(x)$ коэффициенты при степенях x, видим, что все они, кроме коэффициента при x^k, равны 0. □

Ясно, что многочлен $P(x) \equiv 0$ удовлетворяет условию при любом $a > 1$, а многочлен, равный ненулевой константе, не удовлетворяет условию ни при каком a. Пусть теперь степень многочлена P равна $k > 0$ и $P(x) = \alpha x^k + \beta x^{k-1} + \ldots$.

Рассмотрим равенство $aP(x) = P(z)$ как уравнение относительно $z = z(x)$. Если k четно и $a < 0$, то при больших x оно не имеет решений. В остальных случаях можно обозначить $\alpha = \rho^k$

при некотором вещественном ρ. Зафиксируем вещественный параметр θ. Имеем

$$P(\rho x+\theta)-P(z)=P(\rho x+\theta)-aP(x)= \\ =(\beta\rho^{k-1}+k\alpha\rho^{k-1}\theta-\beta a)x^{k-1}+\ldots$$

Положим $\theta_0=\frac{\beta(a-\rho^{k-1})}{k\alpha\rho^{k-1}}$ (при этом значении θ коэффициент при x^{k-1} равен 0) и выберем числа $\theta_-<\theta_0<\theta_+$. Тогда если $x>0$ большое и $z(x)>0$, из монотонности многочлена на некотором луче вида $[M,+\infty)$ получаем, что $z(x)$ лежит между $\rho x+\theta_-$ и $\rho x+\theta_+$. Иными словами, разность $z(x)-\rho x$ стремится к θ_0 при больших x (таких что $z(x)>0$). Для тех x, для которых $z(x)<0$ (такое возможно при четном k) аналогично получаем, что $z(x)+\rho x$ имеет некоторый конечный предел $\tilde{\theta}_0$. Рассмотрим большое натуральное x. Среди чисел $z(x), z(x+1), z(x+2)$ два имеют одинаковый знак. Если, например, $z(x)$ и $z(x+1)$ отрицательны, то $\rho=(z(x+1)+\rho(x+1))-(z(x)+\rho x)+z(x)-z(x+1)$ есть сумма целого числа $z(x)-z(x+1)$ и функции от x, стремящейся к 0 при возрастании x. Отсюда получаем, что число ρ — целое. В любом случае получаем, что 2ρ — целое число. Тогда целочисленные выражения $2z(x)\pm 2\rho x$, имеющие предел, должны быть постоянны при больших x. Таким образом, хотя бы одно из равенств $z(x)=\rho x+\theta_0$, $z(x)=-\rho x+\tilde{\theta}_0$ имеет место при бесконечно многих x (отметим, что из этого следует целочисленность θ_0 или, соответственно, $\tilde{\theta}_0$.) Тогда либо многочлен $P(\rho x+\theta_0)-aP(x)$, либо многочлен $P(-\rho x+\tilde{\theta}_0)-aP(x)$ имеет бесконечно много корней — следовательно, он тождественно равен 0. Применяя лемму получаем, что $P(x)=\alpha(x-x_0)^k$, где x_0 — рациональное число.

Для решения задачи 69 теперь достаточно заметить, что все такие многочлены подходят: $\rho^kP(x)=P(x_0+\rho(x-x_0))$, так что подойдет $a=\rho^k$, где ρ — целое число, для которого $x_0(1-\rho)$ — целое.

Для решения задачи 62 заметим, что с точностью до множителя (не влияющего на существование целого z такого, что $P(z)=aP(x)$) можно считать, что $P(x)=(px+q)^k$, где $p>0$, q — взаимно простые целые числа. Тогда равенство $P(z)=aP(x)$ означает, что $pz+q=\pm a^{1/k}(px+q)$, знак минус возможен

при четном k. Сразу ясно, что $a^{1/k}$ — рациональное число, то есть a — точная k-ая степень. Пусть $a=M^k$. Получаем $pz=\pm M(px+q)-q$, $z=\pm Mx+(\pm M-1)q/p$. Итак, при $q=0$ годится любое целое $M>1$, в противном случае нужно, чтобы $M-1$ было кратно p, либо— если k четно — $M+1$ было кратно p.

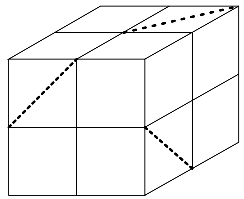
63. Рассмотри выражение

$$(a_{3n}+a_n)+(a_{5n}+a_n)-(a_{5n}+a_{3n})=2a_n.$$

Каждая скобка в левой части делится на $2n$, поэтому и правая часть делится, то есть a_n кратно n.

64. Ответ: 75 ладей.

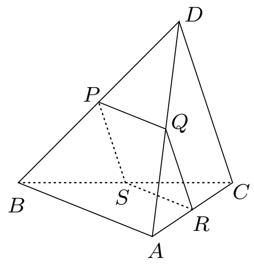
Оценка. Назовем *ободком* множество клеток, находящихся в одном ряду, а также на продолжении этого ряда за одно или несколько ребер. Каждая ладья держит под боем клетки двух ободков. Всего на поверхности куба имеется 150 ободков (есть три возможных направления, по 50 ободков в каждом). На каждом ободке может стоять не более одной ладьи, и любая ладья стоит на двух ободках. Поэтому ладей не может быть больше 75.



Пример. Рассмотрим три соседние грани и поделим каждую на 4 квадрата 25×25. Далее в трех квадратах, указанных на рисунке, поставим ладьи на одной из главных диагоналей.

65. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, а P, Q, R, S — середины ребер BD, AD, AC и BC соответственно. Тогда прямые RS и PQ параллельны AB как средние линии треугольников ABC

и ABD, а прямые PS и QR параллельны DC как средние линии треугольников BDC и ADC. Отсюда немедленно следует, что $PQRS$ — параллелограмм. Но все его вершины лежат на сфере, поэтому он вписанный, т. е. $PQRS$ — прямоугольник. В силу параллельности сторонам прямоугольника прямые AB и CD перпендикулярны. Аналогично $BD \perp AC$ и $BC \perp AD$.



Докажем, что перпендикулярность противоположных сторон тетраэдра является достаточным условием того, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Построим плоскость, проходящую через ребро DC перпендикулярно AB. Высоты тетраэдра, опущенные из точек D и C, лежат в этой плоскости, и значит, пересекаются. Обозначим точку их пересечения через H. Высоты из вершин A и B также должны пересекать высоты из вершин D и C, но так как они не лежат в плоскости DHC, пересекать их они могут только в точке H.

66. Лемма. Пусть A_1, A_2, …, A_n — арифметические прогрессии с натуральными разностями d_1, d_2, …, d_n, причем любые две из них пересекаются. Тогда найдется число, принадлежащее множеству значений всех этих прогрессий.

Доказательство. Индукция по числу прогрессий. База для $n = 2$ прогрессий очевидна. Докажем переход от n к $n + 1$. Не умаляя общности (и по индукционному предположению) можно считать, что прогрессии A_1, A_2, …, A_n начинаются с нуля. Пусть $d = \text{НОК}(d_1, d_2, \ldots, d_{n-1})$. Поскольку прогрессии A_{n+1}, A_1, A_2, …, A_{n-1} имеют общую точку, мы можем считать, что первый член прогрессии A_{n+1} равен ad (где a — некоторое натуральное число). А поскольку прогрессии A_n и A_{n+1} тоже пресекаются, прогрессия A_{n+1} должна содержать число вида bd_n. Если $ad = bd_n$, то мы нашли общую точку всех прогрессий. В противном случае прогрессия A_{n+1} содержит все числа вида

$$ad + k(bd_n - ad) = kbd_n - (k - 1)ad.$$

По китайской теореме об остатках существует число k, которое делится на $d/\text{НОД}(d, d_n)$ и имеет остаток 1 при делении на $d_n/\text{НОД}(d, d_n)$. При таком k соответствующий член прогрессии A_{n+1} делится и на d, и на d_n, т. е. принадлежит множеству значений всех прогрессий. □

Покажем, как из леммы следует утверждение задачи. Заметим, что если какие-то три точки встретились вместе только один раз, то и все остальные точки также должны были в этот момент времени с ними встретиться. Если же одни и те же три точки встретились хотя бы два раза, то они будут встречаться бесконечно много раз, причем времена их встреч образуют арифметическую прогрессию. Зафиксируем пару точек A и B и запустим отсчет времени с момента какой-нибудь их встречи. Пусть в следующий раз они встретились через t секунд, тогда далее все их встречи будут происходить в моменты времени kt, где $k \in \mathbb{N}$. Для каждой точки C моменты ее встреч с парой A, B образуют арифметическую прогрессию $t(R_C + nQ_C)$ (здесь tR_C — момент их первой совместной встречи, tQ_C — интервал между двумя последовательными встречами, $Q_C \in \mathbb{N}$). По условию точки A, B, C и D встретятся вместе, поэтому прогрессии $R_C + nQ_C$ и $R_D + nQ_D$ пересекаются для любой пары точек C и D. Тогда, согласно лемме, у всех таких прогрессий есть общая точка P. Значит, в момент времени tP все точки встретятся вместе.

67. Решение этой задачи написано в первом абзаце решения задачи 54. Следует лишь добавить очевидное соображение, что биссектриса угла B перпендикулярна отрезку XY.

68. Ответ: при $k = 25$.

Ясно что во время путешествий никакие два богатых туриста (или два бедных) не могли оказаться в одном городе. С другой стороны, условие задачи не запрещает находиться в одном городе одновременно бедному и богатому туристу, важно лишь, чтобы в начальный и в конечный момент в каждом городе было по одному туристу.

Допустим, что среди туристов имеется 25 (или более) «богачей». Нарисуем граф: вершины — это города, из каждого города проведем самый дорогой выходящий путь. Тогда этот граф представляет собой лес, в каждом дереве которого все ребра направлены к корню, за исключением единственного ребра, выходящего из корня, — это ребро в дереве как бы двустороннее. Возьмем богача, который расположен ближе всего к корню своего дерева. Этот богач будет в течение 25 ходов самым близким к корню. Значит, он проедет по городам, в которых еще не было других богачей. Это может быть только если граф — это путь из 50 вершин, богачи занимают первые 25 вершин этого пути (т. е. половину) и гуськом движутся по этому пути в сторону второй половины. Отсюда следует, что богачей не может быть больше 25, а также что количество переездов тоже не превосходит 25.

Тогда бедных туристов тоже 25 и они двигаются по аналогичному «бедному» пути, причем в начальный момент они занимают всю вторую половину «богатого» пути. Эти пути не имеют общих звеньев, и при этом движение бедняков таково, что с каждым ходом они должны освобождать от своего присутствия очередную вершину второй половины богатого пути, смещаясь гуськом в первую половину. Тогда движение туристов может происходить, например, следующим образом.

Обозначим города A_1, A_2, …, A_{50}. Допустим, что путь

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to \dots \to A_{49} \to A_{50}$$

составлен из самых дорогих авиалиний, для определенности пусть цена перелета $A_i \to A_{i+1}$ равна $10^6 - i$ рублей. А «бедный путь» пусть сначала проходит по городам с большими четными номерами, потом — по городам с большими нечетными, а далее — с малыми: сначала с четными, потом с нечетными:

$$A_{26} \to A_{28} \to \dots \to A_{50} \to A_{27} \to A_{29} \to \dots \to A_{49} \to \\ \to A_2 \to A_4 \to \dots \to A_{24} \to A_1 \to A_3 \to \dots \to A_{25}.$$

Цены этих авиалинии пусть убывают от 49 до 1 рубля при движении вдоль этого пути. Цены остальных авиалиний назначим произвольно в диапазоне от 100 до 100 000 рублей.