Решения задач первого тура

1. Ответ: да, Вася сможет заказать два перстня. Для первого перстня следует взять кольцо за 10 гульденов и камни за 80 и 90 гульденов, такой перстень стоит $10 \cdot 80 \cdot 90 = 72\,000$ гульденов, а из остальных материалов нужно заказать второй перстень. Тогда второй перстень стоит $30 \cdot 60 \cdot 70 = 126\,000$ гульденов.

Гарри Поттер хочет купить две книжки, каждая из которых стоит 100 рублей. Он может взять в руки (одну) книжку, прочесть заклинание, и от этого цена книжки сразу же уменьшится. Гарри подготовил четыре заклинания: первое уменьшает цену на 10 %, второе на 20 %, третье на 30 %, четвертое на 40%. Каждое заклинание можно использовать лишь один раз. У Гарри есть всего 110 рублей. Как ему следует действовать, чтобы купить обе книжки?

2. Ответ: 20.

Решение 1 (варианты рассадки). Если на двух трехместных скамейках сидит 5 человек, то это возможно, только если на одной скамейке сидит 2 человека, а на другой 3. Значит, Костя при подсчете учтет в этом ряду одну скамейку. Если же на двух скамейках сидит три человека, то возможны два варианта: на одной скамейке три человека, а на другой — ноль, либо на одной скамейке два человека, на другой — один. Как видим, в обоих случаях и в этом ряду при подсчете Костя учтет ровно одну скамейку. Таким образом, результат Кости равен числу рядов.

Решение 2 (четность). Количество людей в ряду — это число людей на первой скамейке плюс число людей на второй. Когда два слагаемых в сумме дают нечетное число (5 или 3), одно из слагаемых нечетно, а втрое четно. Так как слагаемые не превосходят 3, четное слагаемое обязательно равно 0 или 2. Таким образом, на каждом ряду есть ровно одна скамейка, которую подсчитал Костя. Значит, сумма Костиных чисел равна 20.

3. Каждый зеленый человечек подарил кактус кому-то из фиолетовых, а каждый фиолетовый — кому-то из зеленых. Поскольку общее число участников фестиваля нечетно, человечков какого-то цвета больше, чем человечков другого цвета. Вот кому-то из этого «большинства» и не достанется кактуса.

4. Ответ: 99 099 или 109 890. Эти ответы нетрудно найти экспериментально: проделать действия, указанные в условии, с какими-нибудь пятизначными числами. Например, первый ответ получится, если начать с числа 73 152, а второй — с числа 75 132.

Докажем, что у Феди могли получиться только эти два ответа. Пусть $\overline{abcde}$ — исходное число. По условию $a > e$. Пусть еще $d > b$, случай $d < b$ мы разберем позже.

Выполним первое вычитание. Цифры, значения которых записаны формулами, мы для наглядности обвели в рамочки.

$$\begin{array}{r|ccccc} - & a & b & c & d & e \\ & e & d & c & b & a \\ \hline & \boxed{a-1-e} & \boxed{10+b-d} & 0 & \boxed{d-1-b} & \boxed{10+e-a} \end{array}$$

Разберем это вычитание подробнее. В младшем разряде нужно из e вычесть a. Поскольку $e < a$, мы при вычитании занимаем одну единицу второго разряда, и тогда результат вычитания в младшем разряде равен $10+e-a$. Во втором разряде у уменьшаемого остается цифра $d-1$, которая не меньше b. Значит, в результате вычитания во втором разряде получится цифра $d-1-b$. В третьем разряде, очевидно, вычитание даст 0. В четвертом разряде при вычитании мы знаимаем единицу старшего разряда (поскольку $b < d$) и тогда в ответ идет цифра $10+b-d$. Наконец, в пятом разряде с учетом занятой единицы мы получаем $a-1-e$.

Теперь прибавим к полученному ответу его антипод.

$$\begin{array}{r|ccccc} + & \boxed{a-1-e} & \boxed{10+b-d} & 0 & \boxed{d-1-b} & \boxed{10+e-a} \\ & \boxed{10+e-a} & \boxed{d-1-b} & 0 & \boxed{10+b-d} & \boxed{a-1-e} \\ \hline & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 \end{array}$$

Здесь все поразрядные сложения выполняются непосредственно. При этом даже нет никаких переносов.

Разберем второй случай: $d < b$. Снова рассмотрим первое вычитание.

$$\begin{array}{r|ccccc} - & a & b & c & d & e \\ & e & d & c & b & a \\ \hline & \boxed{a-e} & \boxed{b-1-d} & 9 & \boxed{9+d-b} & \boxed{10+e-a} \end{array}$$

В младшем разряде вычитание выполняется как в первом примере. Во втором разряде, после того как мы заняли из него единицу, уменьшаемое содержит цифру $d-1$, которая меньше, чем b. Поэтому для вычитания нам снова придется занимать единицу и тогда результат в этом разряде равен $10+(d-1)-b = 9+d-b$. Теперь в третьем разряде уменьшаемое содержит $c-1$, а вычитаемое — c, нужно снова занимать единицу, и тогда результат вычитания в этом разряде равен $10+(c-1)-c = 9$. В остальных разрядах вычитание выполняется непосредственно.

Теперь опять прибавим к полученному результату антипод.

$$\begin{array}{r|cccccc} + & & \boxed{a-e} & \boxed{b-1-d} & 9 & \boxed{9+d-b} & \boxed{10+e-a} \\ & & \boxed{10+e-a} & \boxed{9+d-b} & 9 & \boxed{b-1-d} & \boxed{a-e} \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 8 & 9 & 0 \end{array}$$

Здесь при сложении возникают переносы из первого, третьего и пятого разрядов.

Как видим, варианты выполнения Фединых действий возникают только при первом вычитании, после чего остальные действия выполняются однозначно. Таким образом, разобранные два случая полностью описывают все возможности, которые могли получиться у Феди.

6. Предположим, что у каждого ребенка сбылось либо два, либо ни одного желания. Если у ребенка сбылось два желания, то его обидчик не получил мороженого, значит, у него одно из желаний не сбылось, значит, у него оба желания не сбылись. И наоборот: если у ребенка не сбылись оба желания, то обиженный им ребенок получил мороженое, значит, у обиженного сбылось одно из желаний, и тогда по нашему предположению у обиженного ребенка должны были сбыться оба желания.

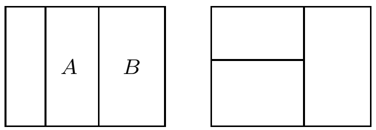
Расставим детей в две шеренги: в первую поставим всех, у кого сбылись два желания, а во вторую шеренгу поставим тех, у кого не сбылось ни одного желания, по правилу: за каждым ребенком из первой шеренги ставим того, кто его обидел. При этом каждый, у кого не сбылось ни одного желания, найдет себе место во второй шеренге: он будет находиться за тем, кого обидел.

Таким образом, общее количество детей должно быть четным. Но условию задачи количество детей — 99, т. е. нечетно. Следовательно, предположение, которое мы сделали в первой строчке решения, не может быть верным. Таким образом, у кого-то сбылось ровно одно желание.

7. Ответ: нельзя.

Если два прямоугольника имеют общую сторону, для определенности вертикальную, то у того прямоугольника, который шире, и площадь, и периметр, и диагональ больше, чем у того, который уже. Например на рисунке ниже прямоугольник B по этим трем параметрам больше прямоугольника A.

Очевидно, есть две различные конфигурации разрезания (см. рисунок). В обеих конфигурациях легко указать два прямоугольника, имеющих общую сторону, тогда у большего из них все три параметра — площадь, периметр, диагональ — больше, чем у второго. Это противоречит требованию условия задачи.



8. Ответ: 105 часов.

Рассмотрим сначала случай, когда все города находятся в одном часовом поясе. Тогда суммарная длительность путешествия катера из самого нижнего города в самый верхний и обратно равна сумме длительностей упомянутых в расписании маршрутов, т. е. 36 часов.

Если же какие-то города, скажем A, требуют поправки на часовой пояс, то, как нетрудно видеть, в сделанном подсчете эта поправка сокращается, потому что в этом вычислении время отправления из A и время прибытия в A присутствуют с противоположными знаками.

Итак, получилась стандартная задача: течение имеет скорость v, катер – $6v$, на дорогу туда и обратно катер потратил 36 часов, сколько потребуется плоту, чтобы проплыть от начала в конец. Решаем ее. Чтобы не возиться с формулам, сделаем пробный заплыв: пусть по течению катер проплыл 5 часов (со скоростью $7v$), тогда обратно (со скоростью $5v$) он будет плыть 7 часов, в сумме получаем 12 часов. Значит, для 36-часового рейса нужно плыть по течению 15 часов, а тогда плот поплывет в 7 раз дольше, т.е. 105 часов.

10. Ответ: в таком виде представимо только число 7 (при $n = 2$ или 3).

Если $n \geqslant 5$, то все выражения под модулями неотрицательны. Тогда указанная сумма равна

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)=5n-15.$$

При $n \geqslant 5$ это число не меньше 10 и к тому же делится на 5. Значит, в этом случае сумма не может быть простым числом.

Если $n \leqslant 1$, то все выражения под модулями неположительны. Тогда указанная сумма равна

$$-(n-1)-(n-2)-(n-3)-(n-4)-(n-5)=15-5n.$$

Опять получилось, что сумма не меньше 10, делится на 5 и поэтому не простая.

Осталось посмотреть, какие значения принимает сумма при $n = 2$, 3, 4. При $n = 3$ сумма равна 6, а при $n = 2$ и 3 сумма равна 7.

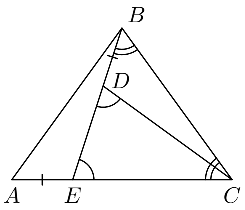
11. Ответ: 1 человечек.

Оценка. Хотя бы один человечек заведомо не получил кактус — см. рассуждение в задаче 3.

Пример. Во время традиционного утреннего хоровода 106 человечков попеременно зеленый, фиолетовый, зеленый, фиолетовый, и т. д. стали в круг. После хоровода каждый человечек подарил соседнему справа кактус. Тогда лишь 107-й человечек, проспавший это мероприятие, оказался без кактуса.

?

13. Заметим, что $\angle CDE = \angle DEC$, следовательно, равны также углы, смежные с этими углами. Тогда треугольники CDB и AEB равны по двум сторонам и углу. Значит, $CB = AB$ и тогда $\angle BCA = \angle BAC$. Ясно, что $\angle ABC > \angle EBC = \angle BCA$, Таким образом, $\angle B$ — наибольший угол в треугольнике ABC.



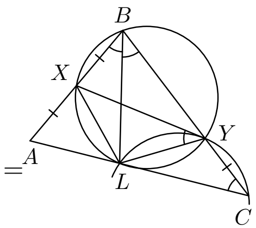
15. Если бы это было неверно, то каждое из чисел с 1-го по 40-е было бы в паре с каким-то числом, стоящим после 61-го. Это невозможно, так как там только 39 чисел.

16. Если n делится на p, то

$$n + p = (ab - 7a - 18b + 1) + (8a + 19b) = (a + 1)(b + 1)$$

тоже делится на p. Тогда $(a + 1)$ или $(b + 1)$ делится на p, но тогда $8a + 19b$ существенно больше p.

17. Очевидно, $\angle ABL = \angle LBC = \angle ACB$ и $BL = LC$. Следовательно, треугольники LBX и LCY равны по двум сторонам и углу. Тогда $\angle BXL = \angle LYC = 180^\circ - \angle LYB$, поэтому четырехугольник $BXLY$ вписанный. Следовательно, $\angle XYL = \angle XBL = \angle YCL$. Тогда прямая YX образует с хордой LY угол, равный вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. Значит, XY касается окружности LCY.



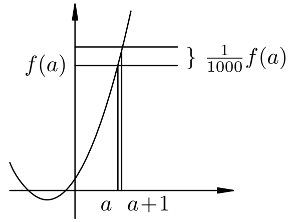
18. Очевидно, трехчлен $f(x)$ положителен при $x > 0$. Следовательно, оба корня отрицательны, трехчлен возрастает при $x > 0$, поэтому из условия $f(a) < f(b)$ следует, что $a < b$.

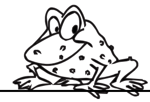
Далее заметим, что если для какого-то натурального a нашлись натуральные b, удовлетворяющие неравенству $f(a) < f(b) < 1{,}001f(a)$, то, конечно, этому неравенству удовлетворяет и наименьшее из таких чисел b — число $b_0 = a+1$. Если мы

докажем утверждение задачи для числа b_0, то для остальных b утверждение будет заведомо выполнено, поскольку при $b > b_0$ будет выполнено неравенство $f(b) - f(a) > f(b_0) - f(a) > 4001$.

Итак, достаточно доказать утверждение задачи лишь для случая $b = a + 1$, т. е. мы решаем следующую задачу.

Квадратный трехчлен $f(x) = x^2+px+q$, где p, $q \geqslant 0$, имеет два различных вещественных корня. Натуральное число a таково, что $f(a+1) < 1{,}001f(a)$. Докажите, что $f(a+1)-f(a) > 4001$.





Картинку можно двигать по горизонтали! С помощью сдвига можно еще уменьшить число параметров, например, добиться того, что $q = 0$.

В дальнейших рассуждениях будем считать, что число a неотрицательное (не пользуясь тем, что оно натуральное). Пусть x_0 — бóльший корень трехчлена $f(x)$, и пусть $\alpha = a - x_0$. Рассмотрим квадратный трехчлен $g(x) = f(x - x_0)$, у него один корень отрицателен, обозначим его $-c$, другой корень равен 0, а коэффициент при x^2 равен 1, поэтому $g(x) = x^2 + cx$. Этот трехчлен удовлетворяет условию $g(\alpha) < g(\alpha + 1) < 1{,}001g(\alpha)$. Утверждение задачи будет доказано, если мы проверим, что $g(\alpha + 1) - g(\alpha) > 4001$.

Заметим, что

$$g(\alpha + 1) - g(\alpha) = (\alpha + 1)^2 + c(\alpha + 1) - \alpha^2 - c\alpha = 2\alpha + 1 + c,$$

Запишем неравенство $g(\alpha + 1) < 1{,}001g(\alpha)$ в виде

$$g(\alpha + 1) - g(\alpha) < \frac{1}{1000}g(\alpha).$$

т. е.

$$\frac{\alpha(\alpha + c)}{1000} - (2\alpha + 1 + c) > 0. \qquad (*)$$

Итак, мы хотим проверить, что все положительные α, удовлетворяющие этому неравенству, удовлетворяют также неравенству $2\alpha + 1 + c > 4001$ или, что то же самое, неравенству

$$\alpha > 2000 - \frac{c}{2}.$$

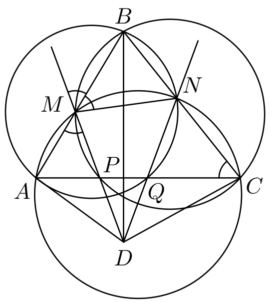
Очевидно, при $\alpha = 0$ неравенство $(*)$ не выполняется. Проверим, что при $\alpha = 2000 - \frac{c}{2}$ неравенство $(*)$ тоже не выполняется: В самом деле, при этом α

$$\frac{\alpha(\alpha+c)}{1000} - (2\alpha + 1 + c) = \frac{1}{1000}\Big(2000 - \frac{c}{2}\Big)\Big(2000 + \frac{c}{2}\Big) - 4001 =$$
$$= \frac{1}{1000}\Big(2000^2 - \frac{c^2}{4}\Big) - 4001 = -\frac{c^2}{4} - 1 < 0.$$

Таким образом, левая часть неравенства $(*)$, являющаяся квадратным трехчленом относительно α, отрицательна и при всех промежуточных значениях $\alpha \in \big[0, 2000 - \frac{1}{2}c\big]$. Следовательно, все положительные α, удовлетворяющие неравенству $(*)$, превосходят $2000 - \frac{c}{2}$, чтд.

19. Если бы это было неверно, то каждое из чисел с 1-го по 49-е было бы в паре с каким-то числом, стоящим после 51-го. Это невозможно, так как там только 49 чисел.

20. Пользуясь тем, что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $180°$, заключаем, что для четырехугольника $BMPC$:



$$\angle AMP = 180° - \angle PMB = \angle BCP;$$

а для четырехугольника $AMNC$:

$$\angle NMB = 180° - \angle AMN = \angle ACN.$$

Отметив угол, вертикальный с углом AMP, получаем, что MB — биссектриса внешнего угла треугольника MDN. Аналогично NB тоже биссектриса внешнего угла треугольника MDN. Как известно, биссектрисы двух внешних углов и биссектриса третьего угла треугольника пересекаются в одной точке (центре вневписанной окружности). Следовательно, DB — биссектриса угла MDN, чтд.

22. Ответ: нельзя.

Как нетрудно убедиться, на отрезке $[-1, 1]$ каждая из трех функций, которые умеет вычислять калькулятор, принимает

значения, также принадлежащие отрезку $[-1, 1]$. Таким образом, все значения, которые может получить Саша, заведомо лежат на отрезке $[-1, 1]$.

23. Ответ: $10 \cdot 2^{12}$ маршрутов. При этом мы имеем в виду, что маршрут не ориентирован, т. е. маршрут — это линия, по которой двигается король; если учитывать еще и направление движения, то число маршрутов будет в 2 раза больше.

Фигура имеет вид крюка толщиной две клетки, вырезанного из прямоугольника 8×10, для краткости будем говорить, что мы имеем дело с крюком 8×10. Ключевое соображение: если увеличить на 1 высоту или ширину такого крюка, то число искомых маршрутов увеличится в два раза.

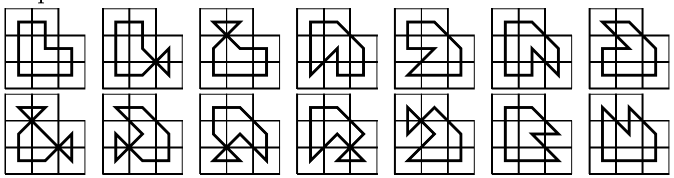
Ю	*Я*
A	B
C	D
$\cdots$	

Докажем это. Пусть S — количество маршрутов короля для крюка 7×10. Проверим, что для крюка 8×10 количество маршрутов равно $2S$. Пусть A, B, C, D — верхние клетки крюка 7×10, *Ю* и *Я* — две верхние клетки крюка 8×10.

Сначала сделаем наблюдение: любой маршрут короля, обходящий все клетки крюка 8×10, должен содержать отрезок *Ю–Я*. Действительно, если король сначала пришел на клетку *Ю*, но не прошел по отрезку *Ю–Я*, то он двигался по пути *A–Ю–B* или *B–Ю–A* и, таким образом, он посетил уже клетки A и B. Но король должен когда-то посетить и клетку *Я*. Тогда уходя с нее, он повторно посетит клетку A или B, что невозможно.

Итак, маршрут короля, обходящий все клетки крюка 8×10, содержит отрезок *Ю–Я*. И тогда очевидно, что любой такой маршрут не содержит отрезок *A–B*. С другой стороны, каждый маршрут короля, обходящий все клетки крюка 7×10, содержит отрезок *A–B*. Тогда ясно, что каждый маршрут в крюке 8×10 получается из маршрута в крюке 7×10 несложной перестройкой: нужно заменить фрагмент *A–B* на *A–Ю–Я–B* или *A–Я–Ю–B*. Таким образом, число маршрутов в крюке 8×10 в 2 раза больше, чем в крюке 7×10.

Рассуждая аналогично, мы получим, что число маршрутов в в крюке 8×10 в 2^2 раз больше, чем в крюке 7×9, в 2^3 раз больше, чем в крюке 6×9 т. д., наконец, в 2^{12} раз больше, чем в крюке 3×3. А маршруты в крюке 3×3 нетрудно подсчитать перебором — их всего 14.



Но следует иметь в виду, что последние 4 варианта не удовлетворяют наблюдению, сделанному выше. Например, самый последний маршрут не может быть перестроен в маршрут для крюка 4×3.

Остальные 10 маршрутов годятся, значит, для крюка 8×10 имеется $10 \cdot 2^{12}$ маршрутов.

24. Ответ: 75 зверей.

Р е ш е н и е 1 (масштаб 1:3). Если мы не путаем, вроде бы то ли фессалийские, то ли каппадокийские звероловы использовали для перевозки диких зверей клетки специальной конструкции. В каждую клетку вмещалось три зверя. Такая клетка называлась *прóцентом.*

Воспользуемся этими древнегреческими наработками. По условию ясно, что количество зверей, проголосовавших за каждого кандидата делится на 3, и значит, мы можем рассадить этих зверей-единомышленников по фессалийским клеткам. Тогда получается, что:

> число прóцентов, проголосовавших за Кабана, равно результату Льва в процéнтах; число прóцентов, проголосовавших за Льва, равно результату Медведя в процéнтах; число прóцентов, проголосовавших за Медведя, равно результату Носорога в процéнтах; наконец, число прóцентов, проголосовавших за Носорога, равно результату Кабана в процéнтах.

Из этого наблюдения следует, что суммарное количество прóцентов равно суммарному количеству процéнтов, т. е. 100. Но тогда результат каждого зверя в процéнтах равен количеству прóцентов, отдавших за него голоса! Получается, что результат Кабана равен результату Льва, результат Льва равен результату Медведя и т. д., т. е. все звери получили поровну голосов. Значит, за Кабана проголовало 25 прóцентов, или 75 зверей.

25. Ответ: нет.

Первая же операция выведет нас из диапазона (1,4]. На один следующий результат не сможет оказаться в этом диапазоне, так как, это легко видеть, все результаты будут либо в промежутке $[-1.1]$, либо больше 4.

26. Ответ: 10.

Из указанных фигурок легко сложить прямоугольник 7×2. Таким прямоугольниками нетрудно замостить всю таблицу (укладывая их вертикально), а также всю таблицу без последней строки (укладывая их горизонтально).

27. О т в е т: $p = 7$.

Левая часть делится на p. Разложим правую часть на множители: $(2q-1)(q-1)$. При $q = 1$ получающееся уравнение на p имеет нецелые корни. При остальных натуральных q правая часть уравнения положительна и делится на простое число p. Значит, либо $q - 1$, либо $2q - 1$ делится на p

Если $q-1$ делится на p, то $q-1 \geqslant p$, и сразу видно, что левая часть уравнения отрицательна и решений нет. Аналогично, если $2q - 1$ делится на p и $2q - 1 \geqslant 2p$. Осталось разобраться со случаем $2q-1 = p$. Подставляя $p = 2q-1$, получаем квадратное уравнение

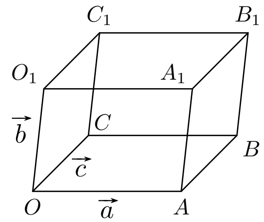
$$(4q^2 - 4q + 1) - q(2q - 1) - 18 = q - 1,$$

т. е. $2q^2 - 4q - 16 = 0$. Подходит положительный корень $q = 4$, при этом $p = 2q - 1 = 7$.

28. О т в е т: нет, не могут.

Р е ш е н и е 1 (сумма векторов). Пусть стороны параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$ задаются векторами $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OO_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Тогда диагонали параллелепипеда задаются векторами

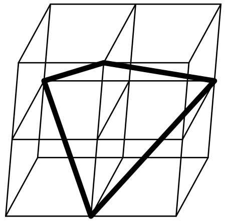
$$\overrightarrow{B_1O} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c},$$
$$\overrightarrow{O_1B} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{AC_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$



$$\overrightarrow{CA_1} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

Как видим, сумма этих векторов равна нулю. Значит, по неравенству треугольника ни один из них не может быть длиннее, чем сумма длин остальных трех.

Р е ш е н и е 2 (смотри!). В параллелепипеде общего вида 4 различных главных диагонали. На рисунке показаны 4 копии параллелепипеда и отмечено по одной диагонали каждого вида. Получился пространственный четырехугольник. Отсюда следует, что длины p, q, r, s этих диагоналей (при записи в любом порядке) удовлетворяют обобщенному неравенству треугольника



$$p + q + r \geqslant s.$$

Но для заданных чисел одно из таких неравенств неверно: $11 > 2 + 3 + 5$.