

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

1. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3 - ax^2 + b^3 = 0 \\ x^3 - bx^2 + c^3 = 0 \\ x^3 - cx^2 + a^3 = 0 \end{cases}$$

не имеет вещественных решений, если числа a , b и c различны.

2. На стороне BE треугольника ABE выбраны точки C и D так, что $BC = CD = DE$. Точки X , Y , Z и T — центры описанных окружностей треугольников ABE , ABC , ADE и ACD соответственно. Докажите, что T — точка пересечения медиан треугольника XYZ . (С. Иванов)

3. В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

4. По окружности расставлены несколько ненулевых вещественных чисел. Для любых двух чисел a и b , стоящих рядом, числа $a + b$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ — целые. Докажите, что среди данных чисел есть не более четырех различных.

.....

Олимпиада 2012 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Натуральное число имеет ровно миллион натуральных делителей (включая единицу и само число). Они выписаны в порядке убывания. Какое наименьшее возможное количество делителей может иметь 250-е число в этом списке? (Ф. Петров)

6. $ABCD$ — параллелограмм, прямая ℓ проходит через B перпендикулярно BC . Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами. (Ф. Петров)

7. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз. (С. Иванов)