

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

1. Ветви параболы $y = 4ax^2 + 12ax + 9a - 1$ направлены вниз. Докажите, что эта парабола не пересекается с осью абсцисс. (Д. Максимов)

2. В средней школе №1 Чудеснопольского района Страны Дураков работали штатные и внештатные педагоги, причем средняя зарплата штатных была равна 45 грошей, а внештатных — 11 грошей в месяц. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного из штатных педагогов перевели во внештатные (не изменив его зарплату), в результате чего и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата увеличилась на 2 гроша в месяц. Сколько всего педагогов в школе? (А. Храбров)

3. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно, и касается стороны AC в ее середине M . Известно, что $AH = HM$. Докажите, что $CY = YM$. (С. Берлов)

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1 . Из этих квадратов выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.) (А. Голованов)

5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел, в которой любые три подряд идущих числа образуют прогрессию — арифметическую или геометрическую. Известно, что первые два числа в последовательности делятся на 4. Докажите, что в последовательности нет простых чисел. (О. Иванова)