САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИ ДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

---

1. Учитель вы ал Диме и Сереже по квадратному трехчлену, написал на доске 4 числа и велел каж ому из учеников подставить эти четыре числа в свой квадратный трехчлен. У Сере и получились значения 1, 3, 5 и 7. А Дима успел подставить только первые три числа и получил 17, 15 и 13. Когда же Дима собрался подставить четвертое число, казалось, что учитель уже стер числа с доски. Какое у него получилось бы зн чение, если бы он успел подставить четвертое число? (Ответ должен быть конк етным числом). (*А. Голованов*)

2. Для натура ьных чисел a и b выполняется неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) + b \cdot \text{НОК}(a, b) < 2,5ab.$$

Докажите, что a д лится на b. (*А. Храбров*)

3. Внутри треу ольника ABC выбрана точка D, для которой $AD = DC$. Прямая BD пересекает ст рону AC в точке E. Оказалось, что $\frac{BD}{BE} = \frac{AE}{EC}$. Докажите, что $BE = BC$. *Ф. Бахарев*)

4. В городе грюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не ме ее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в г роде есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей. (*А. Голованов, С. Берлов*)

....

Олимп ада 2011 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В выпукло четырехугольнике $ABCD$ все углы меньше, чем 150°, причем сумма углов A D равна 150°. Докажите, что его площадь больше, чем $\frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot\ C + BC \cdot CD)$. (*С. Берлов*)

6. Бесконечна последовательность a_1, a_2, a_3, ... составных натуральных чисел задается следующ м правилом: $a_{n+1} = a_n - p_n + a_n/p_n$, где p_n — наименьший простой делитель a_n. Известно, что все члены последовательности кратны 37. Какие значения может принимать число a_1? (*О. Иванова*)

7. Саша и Сер жа играют в игру на правильном стоугольнике. В начале игры Саша расставляет вершинах стоугольника натуральные числа. Далее игроки ходят по очереди, начин ет Сережа. Каждым ходом Сережа прибавляет по 1 к числам в двух противополо ных вершинах, а Саша прибавляет по 1 к числам в двух соседних вершинах. Сережа стремится к тому, чтобы после его хода на стоугольнике стояло как можно больш нечетных чисел. Какого наибольшего количества он сможет добиться независи о от Сашиных действий? (*С. Берлов*)