САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИ ДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

---

1. Даны два к адратных трехчлена f и g. Трехчлен f принимает в некоторых четырех точках значения 2, 3, 7 и 10, а трехчлен g в первых трех из этих точек принимает значен я соответственно 16, 15 и 11. Найдите значение трехчлена g в четвертой точке. (*А. Голованов*)

2. Точка O — ентр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором угол B авен $30°$. Луч BO пересекает AC в точке K. Точка L — середина дуги OC описанн й окружности треугольника KOC, не содержащей точку K. Докажите, что точ и A, B, L, K лежат на одной окружности. (*Ф. Петров*)

3. Можно ли ложить параллелепипед $6 \times 7 \times 7$ из брусков размера $1 \times 1 \times 2$ так, чтобы брус ов каждого из трех возможных направлений было одинаковое количество?

4. Назовем чи ло x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняю ся неравенства $|x - k^2| > 10^6$ и $|x - k^3| > 10^6$. Докажите, что с еств ет бескон чно много таких нат альных чисел n что число 2^n алеко от квадратов и кубов. (*А. Голованов, С. Иванов*)

. . . .

Олимп ада 2011 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу на доске прибавляют разность между его наибольшим собственным делителем и его наименьшим собственным делителем, и результат записывают на доску вместо исходного числа. (Если число на доске оказалось простым, то процесс заканчивается.) В начале написано число, большее 1000. Докажите, что рано или поздно на доске по вится число, не делящееся на 17. (*О. Иванова*)

6. В выпукло четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$. (*А. Акопян, Ф. Петров*)

7. В тайном о ществе 2011 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рубле , которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов обществ переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в общ стве, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могу перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажит , что в этом обществе ровно 2010 пар друзей.