САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИ ДА ШКОЛЬНИКОВ 2011 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Учитель в дал каждому ученику 10“А” квадратный трехчлен, а потом написал на доске числа и велел каждому ученику подставить эти четыре числа в его квадратный рехчлен. У Васи получились значения 2, 3, 5 и 8. А Петя успел подставить только первые три числа и получил 16, 15 и 13, а когда он собрался подставить четвер ое число, оказалось, что учитель уже стер задание с доски. Помогите Пете най и четвертое значение (ответ должен быть обоснован, иначе Петя решит, что над ни издеваются). (*А. Голованов*)

2. У каждого н турального числа от $n+1$ до $n+1000$ выписывают все делители, не превосходящие 000. Докажите, что для бесконечно многих натуральных n сумма всех выписанных чисел больше миллиона, и для бесконечно многих — меньше.
(*А. Храбров, Ф. Петров*)

3. Точка O — ентр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, с углом $\angle B = 30°$. уч BO пересекает AC в точке K. Точка L — середина дуги OC описанной окружн сти треугольника KOC, не содержащей точку K. Докажите, что
, , , . .

4. В городе грюмове 2 000 000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не ме ее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в г роде есть четверо попарно знакомых друг с другом жителей.
(*А. Голованов, С. Берлов*)

....

Олимп ада 2011 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Назовем чи ло x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняю ся неравенства $|x - k^2| > 10^6$ и $|x - k^3| > 10^6$. Докажите, что существует бескон чно много таких натуральных чисел n, что число 2^n далеко от квадратов и кубов. (*А. Голованов, С. Иванов*)

6. Имеется ги лянда из n лампочек. Вначале некоторые из них включены, а некоторые нет. Ра решается взять любую горящую лампочку (только горящую!) и погасить ее, из енив при этом состояние двух соседних лампочек (горящие выключить, негор щие включить). При каких n можно с помощью этих операций выключить все ла почки независимо от их начального состояния?
(*В. Волков, Р. Бойкий*)

7. На диагона и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась точка P, лежащая внутри т еугольника ABD, для которой

$$\angle \ CD + \angle BDP = \angle ACB + \angle DBP = 90° - \angle BAD.$$

Докажите, что либо $\angle BAD + \angle BCD = 90°$, либо $\angle BDA + \angle CAB = 90°$.
(*Ф. Петров, И. Богданов*)