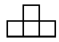
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009/10 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 КЛАСС

1. Дан квадрат 10×10 клеток. Каждая клетка покрашена в какой-то цвет, причем в любой четырехклеточной фигурке вида  (фигурка может быть повернута или перевернута) цвета всех клеток разные. Какое наименьшее число различных цветов может быть в такой раскраске?

(*С. Иванов*)

2. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM в точке P. Оказалось, что $BK = 2PM$. Докажите, что $AK = AP$.

3. Существуют ли три таких натуральных числа, что в любой паре из них остаток от деления большего числа на меньшее равен неполному частному? (*М. Антипов*)

4. Есть клетчатая полоска размера 1×75. На левых 25 клетках и на правых 25 клетках лежит по одному камню, а средние 25 клеток свободны. Федя и Саша играют в такую игру: они ходят по очереди, за один ход разрешается либо передвинуть один камень на одну клетку вправо, если та свободна, либо выкинуть один камень. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу, если первым ходит Федя?

(*Ф. Бахарев*)

....

Олимпиада 2009/10 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория

5. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle A$. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = XY = YC$. Докажите, что $3\,CY < 2\,BC$. (*С. Иванов*)

6. У часовщика есть 5 будильников (с 12-часовыми циферблатами). Каждый из них звонит, когда его стрелки показывают 12 часов. Будильники идут с правильной скоростью, но могут показывать неправильное время, отличающееся от истинного на целое число часов. В середине каждого часа часовщик выбирает один из будильников и переводит его стрелки на 1, 2, 3, 4, 5 или 6 часов вперед. Он стремится к тому, чтобы по истечении каждого часа хотя бы один из будильников зазвонил. Докажите, что рано или поздно он не сможет этого добиться.

(*О. Иванова, С. Иванов*)

7. В ряд выписаны 2010 натуральных чисел, под каждым из них написана его сумма цифр. Может ли быть так, что каждое число в верхнем ряду больше предыдущего на одну и ту же величину, а каждое число в нижнем ряду больше предыдущего на 1? (*С. Иванов, А. Храбров*)