

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. РЕШЕБНИК.

Каждая задача оценивается из 20 баллов, всего за тур 100 баллов.

Задача 1. Пироги Бабушки Яги

Бабушка Яга решила испечь два вида пирогов с ягодой: открытые и закрытые, а затем выгодно продать их лесным жителям. Для производства пирогов ей нужны яйца, мука, вода и ягода. Для закрытого пирога Бабушка смешивает 4 стакана муки, 2 стакана воды и 1 яйцо. В начинку идет 1 стакан ягоды. В открытый пирог Яга кладет 2 стакана ягоды, а для теста смешивает 1 стакан муки, 1 стакан воды и 1 яйцо.

Товарищи Яги решили помочь ей и доставить необходимые ингредиенты. Гуси-лебеди привезли ей 19 яиц. Леший принес большое лукошко, в которое помещается 34 стаканов ягод.

XXIX Международный экономический фестиваль школьников «Сибиряда. Шаг в мечту»

Водяной принес 2 ведра воды, в каждое ведро помещается 14 стаканов воды. Наконец, внук, пионер Иван, принес любимой Бабушке 2 мешка муки, в каждом по 26 стаканов.

Закрытые пироги Яга продает по 10 тугриков. Но больше лесным жителям нравятся открытые пироги, содержащие больше ягод, поэтому они продаются по 15 тугриков.

А) Определите, сколько пирогов продаст Бабушка, и какую максимальную выручку она получит при продаже по указанным ценам. (10 баллов)

Б) К Яге обратился Горыныч с просьбой поставить ему 10 закрытых пирогов. Он готов заплатить дороже рыночной цены. Какую цену стоит назвать Горынычу, чтобы Бабушка согласилась продать эти пироги? (5 баллов)

В) Царь Горох издал указ, запрещающий любую эксклюзивную торговлю, поэтому Бабушка Яга не согласится на любую цену, отличную от рыночной. Но она будет готова продать нужное количество закрытых пирогов Горынычу, если рыночная цена на них изменится соответствующим образом. Определите, как должна измениться цена на закрытый пирог (при неизменности цены открытого пирога), чтобы Яга произвела и продала соответствующее количество пирогов. Какую выручку при этом получит Яга. (5 баллов)

Решение

А) Первоначально составляем задачу максимизации выручки. Пусть x – количество закрытых пирогов, y – количество открытых пирогов. В скобках указаны коэффициенты наклона соответствующих линий.

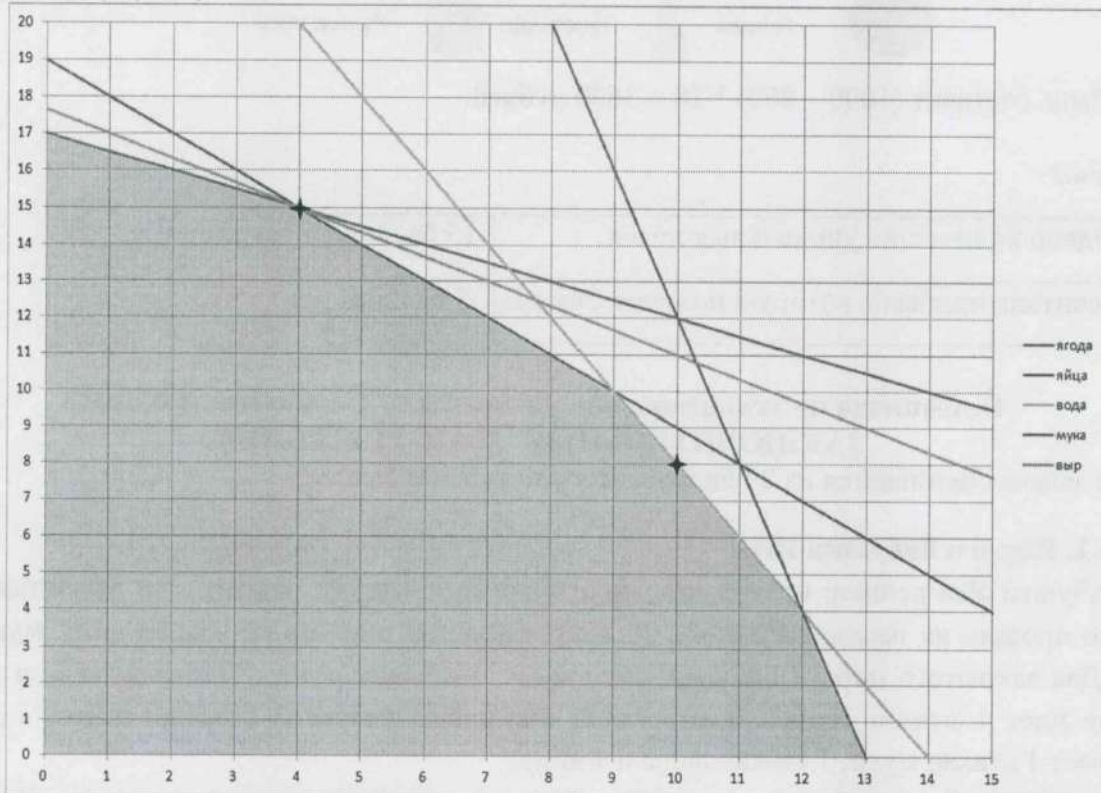
$$10x + 15y \rightarrow \max \text{ (целевая функция – выручка } k_{\text{цф}} = -2/3 = -0,67); 4x + y \leq 52 \text{ (1 – мука } k_1 = -4)$$

$$2x + y \leq 28 \text{ (2 – вода } k_2 = -2); x + y \leq 19 \text{ (3 – яйца } k_3 = -1)$$

$$x + 2y \leq 34 \text{ (4 – ягода } k_4 = -1/2 = -0,5)$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Все эти неравенства образуют «множество достижимых объемов производства», изображенное на следующей картинке (по оси абсцисс – количество закрытых пирогов, по оси ординат – количество открытых пирогов). Точки перегиба имеют координаты (сверху вниз): (0; 17), (4; 15), (9; 10), (12; 4), (13; 0).



Максимизация выручки означает, что линия выручки ($TR = 10x + 15y$) должна пройти как можно выше и правее, и в то же время «касаясь» полученного множества.

Оптимальной здесь будет точка (4; 15) – 4 закрытых пирога и 15 открытых пирогов – точка на пересечении линий (ягоды) и (яиц). То, что точка является оптимальной, **математически** подтверждается наклоном рассматриваемых линий:

наклон (муки) в уравнении $y = kx + b$ составит -4 ;

наклон (воды) равен -2 ;

наклон (яиц) равен -1 ;

наклон (ягоды) равен $-0,5$;

наклон (выручки) равен $-0,67$ (находится между наклонами линий (яиц) и (ягоды): $-1 < -0,67 < -0,5$).

Выручка в данной точке составит $10 \cdot 4 + 15 \cdot 15 = 265$ тугрика.

Оптимальную точку можно было также получить «методом перебора»: в подобных задачах оптимальным решением является одна или несколько точек перегиба, поэтому достаточно посчитать выручку в каждой из таких точек и выбрать точку с максимальной выручкой.

Другой допустимый здесь «метод перебора» заключается в следующем. Конечно, поставленная математическая задача предполагает возможность получения не целых значений, но, исходя из условия, можно сделать правдоподобное предположение о целочисленности количества пирогов. Тогда можно было определить все максимально возможные объемы производств, рассчитать выручку и выбрать оптимальную точку.

Критерии оценивания:

Максимум (10 баллов) выставляется при наличии полного обоснованного ответа по выбору оптимальной точки.

За выполнение отдельных «шагов» решения ставились:

- КПВ – 3 балла (если были указаны только граничные точки – 1 балл);

- Координаты оптимальной точки (с расчетом) – 2 балла;

- Обоснование оптимальности точки – 3 балла;

- Вычисление выручки – 2 балла (но только для допустимой точки! если точка не допустима, то соответствующую ей выручку фирма не получит).

Если при решении методом перебора рассмотрены не все варианты, но указана «тенденция» изменения выручки, которая могла бы указать на оптимальную точку (при этом не приведено полного обоснования, что, например, далее выручка будет только снижаться) – 5 из 10 баллов.

Если при решении методом перебора рассмотрены не все варианты, не указана «тенденция» изменения выручки и нет никакого обоснования – 3 из 10 баллов.

Б) Здесь полным ответом считается не только указание конкретной точки и цены, но и обоснование, что именно указанная точка оптимальна!

Чтобы Яга согласилась на эту эксклюзивную продажу, ее выручка в новой ситуации должна быть не ниже старой (265 тугриков).

Чтобы продать 10 пирогов Горынычу, Бабушке нужно произвести **не менее** 10 закрытых пирогов. Получаемые точки: (10;8), (11;6), (12;4) и (13;0). Из указанного количества закрытых пирогов 10 пирогов будет продано по цене, определенной Горынычем., остальное – по старой рыночной цене.

Выбор оптимальной точки можно осуществить как минимум двумя способами:

1 способ: перебрать все указанные точки (посчитать выручку и определить минимальную цену, которую нужно предложить Горынычу) и выбрать ту, в которой Горынычу придется заплатить меньше всего.

Получаем:

$$TR_1(10;8) = 10 \cdot P_3 + 8 \cdot 15 \geq 265$$

$$P_3 \geq 14,5$$

$$TR_2(11;6) = 10 \cdot P_3 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 15 \geq 265$$

$$P_3 \geq 16,5$$

$$TR_3(12;4) = 10 \cdot P_3 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 15 \geq 265$$

$$P_3 \geq 18,5$$

$$TR_4(13;0) = 10 \cdot P_3 + 3 \cdot 10 \geq 265$$

$$P_3 \geq 23,5$$

Таким образом, чтобы получить желаемое Горынычу нужно предложить цену не ниже 14,5 тугриков.

2 способ: для Горыныча создать запрашиваемые им 10 закрытых пирогов, а на оставшихся ресурсах решить снова оптимизационную задачу Бабушки Яги.

Получится, что, произведя 10 закрытых пирогов Горынычу, далее оптимальным рыночным поведением Бабушки Яги будет направление всех оставшихся ресурсов на производство 8 открытых пирогов. Отсюда из неравенства и определяется цена Горыныча:

$$TR(10;8) = 10 \cdot P_3 + 8 \cdot 15 \geq 265; P_3 \geq 14,5$$

Критерии оценивания:

Полное рассуждение (с указанием, что Бабушка может производить и больше 10 закрытых пирогов, но это ей не выгодно) – 5 баллов.

Неполное рассуждение (Бабушка производит ровно 10 закрытых пирогов, нет указания – почему именно эта точка) – 3 балла.

Если при расчете бралась достижимая, но при этом не оптимальная точка, то ставилось 2 балла.

Если при расчете бралась недостижимая (по ресурсам) точка, то правильной общей логике вычисления ставился 1 балл.

В) Аналогично здесь полным ответом считается не только указание конкретной точки и цены, но и обоснование, что именно указанная точка оптимальна!

Кроме того, в данных условиях задачи использование предыдущих значений выручки для вычисления цены является некорректным: даже, если при новых ценах выручка Бабушки окажется ниже, чем было, все равно вернуться к этой «старой» выручке она не сможет, поскольку цены на рынке изменились!

Ответ на вопрос этого пункта следует из следующего рассуждения: чтобы, продавая пироги по рыночным ценам, удовлетворить просьбу Горыныча Яга должна получать максимальную выручку при производстве **не менее** 10 закрытых пирогов.

Опять рассматриваем точки: (10;8), (11;6), (12;4) и (13;0). Первая, вторая и третья точки лежат на линии (2 – вода). Третья и четвертая точки лежат на линии (1 – мука). Чтобы эти точки могли стать оптимальными, наклон новой линии выручки должен стать не меньшим (по модулю), чем наклон линии (2 – вода). В частности:

- точки (10;8), (11;6), (12;4) будут оптимальными, если наклон линии выручки будет равен (по модулю) 2;

- точка (12;4) будет оптимальной при наклоне линии выручки от 2 до 4;

- точки (12;4) и (13;0) будут оптимальной при наклоне линии выручки равном 4;

- точка (13;0) будет оптимальной при наклоне линии выручки свыше 4.

Итак, по условию цена открытых пирогов не меняется, наклон должен быть больше либо равным 2 (по модулю). Тогда получаем

$$P_3/P_0 = P_3/15 \geq 2.$$

Отсюда, для оптимальности новой точки цена на закрытый пирог должна составить не меньше 30: $P_3 \geq 30$ тугриков (увеличиться в 3 раза или на 200%).

При цене 30 тугриков новая выручка составит $30 \cdot 10 + 15 \cdot 8 = 420$ тугриков.

Критерии оценивания:

Полное рассуждение (с указанием, что Бабушка может производить и больше 10 закрытых пирогов, все будет зависеть от соотношения цен) – 4 балла.

Неполное рассуждение (вычисление цены в случае, если Бабушка производит ровно 10 закрытых пирогов, нет указания – почему именно эта точка) – 3 балла.

Расчет выручки при новой цене – 1 балл.

При вычислении цены на основе любого сравнения с «предыдущей» выручкой ставилось 0 баллов.

Задача 2. Кто должен платить налог?

Спрос и предложение на рынке товара Z в некотором государстве описываются линейными функциями. Когда рынок находится в равновесии, то равновесная цена товара Z оказывается равна 140 тугриков за штуку, а равновесный объем составляет 80 тысяч штук. Также известно, что все покупатели, даже бесплатно, не готовы приобрести больше 360 тысяч штук товара Z.

Для пополнения казны на заседании совета министров было предложено ввести налог, связанный с куплей-продажей товара Z. Министр А предложил возложить обязанности уплаты налога на покупателей – после того, как покупатель приобретет товар на рынке, он должен заплатить в казну X % от покупной цены этого товара, т.е. ставка налога должна составить X %. В этом случае максимально можно собрать 2,4 млн. тугриков.

Однако при обсуждении порядка уплаты налога у Министра Б возникли сомнения, что этот налог легко удастся собрать с покупателей и предложил иной порядок взимания налога – пусть налог платят продавцы, так как их проще контролировать – после того, как продавец продаст товар, он должен заплатить Y % от его продажной цены, т.е. ставка налога должна составить Y %. В этом случае удастся собрать такую же сумму налога.

А) Определите значение ставок налога с покупателей (X %) и с продавцов (Y %). (15 баллов)

Б) Рассчитайте, каким окажется объем продаж товара Z, если будет принято предложение Министра А, и каким будет объем продаж, если будет принято предложение Министра Б. (5 баллов)

Решение

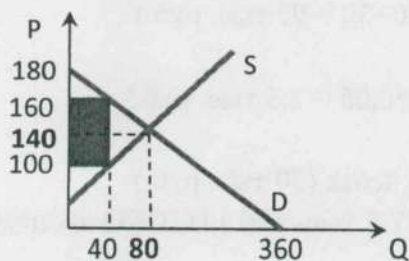
А) Рассчитаем функцию спроса по двум точкам. Получаем $Q=360-2P$, где Q – количество товара Z, в тысячах штук, а P – цена штуки товара Z, в тугриках.

Максимальную сумму налога можно собрать, если установить такой налог, который обеспечит объем продаж равный половине равновесного объема (в случае линейных функция спроса и предложения). Значит, объем продаж при данном налоге составит $80/2=40$ тысяч штук товара Z. Теперь можно рассчитать величину налога в тугриках с единицы товара Z. $2400/40=60$ тугриков. Если налог будут платить продавцы, то они будут готовы продать его по цене, которую мы найдем из функции спроса, подставив в нее значение объема продаж $40=360-2P$. Отсюда находим, что $P=160$. А значит ставка налога для продавцов (Y%) будет определяться соотношением $(60/160=0,375)$ и составит 37,5%.

Если налог будут платить покупатели, то на рынке товар будет продаваться по цене $160-60=100$. Ставка налога для покупателей (X%) будет определяться соотношением $(60/100=0,6)$ и составит 60%.

Б) Объем продаж будет одинаковым равным - 40 тысяч штук товара Z.

График-иллюстрация к решению.



Критерии

Пункт А	15 баллов
Пункт Б	5 баллов

Задача 3. Бизнес почтальона Печкина

Почтальон Печкин организовал собственное предприятие по оказанию курьерских услуг. Суммарный годовой доход (выручка) предприятия составляет 150 тыс. рублей. Вся выручка поступает Печкину в конце года.

В начале этого года почтальон Печкин решил купить новый автомобиль для производственных нужд, нормативный срок службы которого составляет 8 лет. Чтобы купить этот автомобиль, ему пришлось взять в банке кредит в размере 120 тыс. рублей сроком на 8 лет, обещая гасить этот кредит равными долями в конце каждого года. Банк установил на текущий год следующие процентные ставки - 10% годовых по кредитам и 5 % годовых по депозитам (т.е. по вкладам). Все выплаты осуществляются в конце года.

Почтальон Печкин нанимает двух помощников - кота Матроскина и его друга Шарика, обещая каждому из них зарплату в 20 тыс. рублей, но с условием - половина зарплаты будет выплачена в начале года, а вторую половину они получают в конце года. Кот Матроскин и пес Шарик до того, как устроились на работу к Печкину, трудились на государственной почте, где могли бы работать и дальше, получая по 15 тысяч рублей каждый (все выплата в конце года), но посчитали, что выгоднее работать у Печкина.

На покупку всех необходимых для работы материалов, а также бензина для автомобиля у Печкина уходит 30 тыс. рублей в год (оплата по договору в начале года).

Почтальон Печкин использует под офис собственную дачу, которую он мог бы сдавать в аренду за 25 тыс. рублей в год с оплатой в конце года. Конкурент Печкина – всемирно известная фирма, осуществляющая экспресс-доставку грузов, предлагает ему работу консультанта в региональном офисе компании с зарплатой 50 тыс. рублей в год, выплата в конце года.

Исходя из представленных данных:

А) определите годовые бухгалтерские и экономические издержки почтальона Печкина (16 баллов);

Б) рассчитайте годовую бухгалтерскую и экономическую прибыль почтальона Печкина (2 балла);

В) оцените, сделав соответствующие содержательные пояснения, выгодно ли почтальону Печкину заниматься оказанием курьерских услуг на таких условиях. (2 балла)

Решение

А) Определим величину бухгалтерских издержек:

- амортизация автомобиля ($120/8 = 15$ тыс. руб.)
- проценты по кредиту ($120 \cdot 0,1 = 12$ тыс. руб.)
- зарплата помощникам ($20 \cdot 2 = 40$ тыс. руб.)
- необходимые материалы и бензин (30 тыс. руб.)

ИТОГО бухгалтерские издержки ($15+12+40+30 = 97$ тыс. руб.)

Определим величину неявных издержек:

- неполученные проценты по депозитам ($(30+20) \cdot 0,05 = 2,5$ тыс. руб.)
- неполученная плата за аренду (25 тыс. руб.)
- неполученная заработная плата Печкина у конкурента (50 тыс. руб.)

ИТОГО неявные издержки ($2,5+25+50 = 77,5$ тыс. руб.) ИТОГО экономические издержки ($97+77,5 = 174,5$ тыс. руб.).

Б) Рассчитаем величину бухгалтерской прибыли ($150-97 = 53$ тыс. руб.)

Рассчитаем величину экономической прибыли ($150-174,5 = -24,5$ тыс. руб.)

В) Нет, не выгодно, так как в случае иного использования своих собственных ресурсов почтальон Печкин может рассчитывать на больший доход.

Критерии

Пункт А	16 баллов
Пункт Б	2 балла
Пункт В	2балла

Задача 4. Вклад (обменный курс)

В начале года (в январе) думный дьяк Филимон решил вложить накопленные тяжким трудом средства в единственный в Лукошкине банк «Заработай» под проценты. Сумма, которую дьяк принес в банк, составляет 1000 тугриков. Банк предлагает разные вклады:

Первый вклад: в тугриках на год, проценты начисляются раз в полгода по ставке 10% на полгода. Вклад можно забрать до окончательного срока (год), но не ранее, чем через полгода, при этом придется выплатить штраф в 30 тугриков.

Второй вклад: в европейских гульденах на полгода, процентная ставка – 1% на полгода. Проценты начисляются в конце срока. Обменный курс гульденов на текущий момент составляет 20 тугриков за 10 гульденов. Ожидаемый курс через полгода (в июле) и через год (в январе) составит 23 тугрика за 10 гульденов.

А) Определите, какой стратегии вложений нужно придерживаться Филимону, чтобы через год он смог забрать из банка максимальную сумму (забрать деньги через год придется обязательно, даже, если платить штраф). Какую сумму ожидает получить Филимон? (12 баллов)

Б) Через полгода после первоначального вложения средств Филимон понял, что ожидания по обменному курсу не оправдались: реальный обменный курс в июле составил 21 тугрик за 10 гульденов. Ожидаемый обменный курс в январе по-прежнему 23 тугрика за 10 гульденов. Изменится ли стратегия Филимона и сумма, которую он получит? (6 баллов)

В) Если по окончании срока вложений через год реальный обменный курс составит 24 тугрика за 10 гульденов, то какой доход получит дьяк Филимон? (2 балла)

При вычислении все числа округляйте до целого по правилам математики.

Решение

А) Определяя первоначальную стратегию, Филимон будет ориентироваться на ожидаемый обменный курс. Всего у Филимона 4 варианта:

1) Вложить все на год на вклад в тугриках. Если предположить, что вклад с капитализацией процентов, то ожидаемая к получению сумма $1000 \cdot (1+10\%)^2 = 1210$ тугриков. Допустимо было предположить, что начисление процентов по вкладу происходило по схеме простых процентов, тогда получаемая сумма $1000 \cdot (1+2 \cdot 10\%) = 1200$ тугриков. В качестве правильного засчитывался любой из вариантов.

2) Вложить все на год на вклад в гульденах: $1000/2 \cdot ((1+1\%)^2) \cdot 2,3 = 1173$ тугрика.

3) Вложить средства на полгода в тугрики, забрать раньше и вложить в гульденны: $(1000 \cdot (1+10\%) - 30) / 2,3 \cdot (1+1\%) \cdot 2,3 = 1081$ тугрика.

4) Вложить средства на полгода в гульденны, затем вложить в тугрики, и забрать раньше: $1000/2 \cdot (1+1\%) \cdot 2,3 \cdot (1+10\%) - 30 = 1248$ тугрика. Получается, что нужно воспользоваться 4-м вариантом.

Б) В соответствии с результатом пункта (а) Филимон вложился в гульденны и получил $1000/2 \cdot (1+1\%) = 505$ гульденов

Филимон либо продолжит следовать выбранной ранее стратегии. Ожидаемая сумма: $1000/2 \cdot (1+1\%) \cdot 2,1 \cdot (1+10\%) - 30 = 1137$ тугрика.

Либо поменяет стратегию и продолжит вложения в гульденны. Ожидаемая сумма: $505 \cdot (1+1\%) \cdot 2,3 = 1173$ тугриков. Таким образом, Филимону следует сменить стратегию.

В) По окончании срока реальная сумма вложений, которую получит Филимон составит: $1000/2 \cdot ((1+1\%)^2) \cdot 2,4 = 1224$ тугрика.

Критерии

XXIX Международный экономический фестиваль школьников «Сибиряда. Шаг в мечту»

Пункт А)	12 баллов, в том числе по 3 балла за правильный расчет ожидаемой суммы по каждому из вариантов вложения
Пункт Б)	6 баллов, в том числе: 1 балл за расчет суммы, которая окажется в распоряжении Филимона через полгода 2 балла за расчет ожидаемой суммы при сохранении выбранной стратегии 2 балла за расчет ожидаемой суммы при смене стратегии 1 балл за вывод
Пункт В)	2 балла

Задача 5. Бирюльки фирмы «Кроха»

В царстве царя Гороха очень маленькая фирма «Кроха», как и множество других фирм этого царства, занимается производством и продажей бирюлек. В этом месяце фирма «Кроха» с максимальной выгодой для себя, произвела и продала 400 бирюлек, при этом ее выручка составила 10 000 тугриков. Если бы она произвела 300 бирюлек, то ее средние общие издержки достигли бы своего минимального значения, а она получила бы при этом прибыль 1 500 тугриков.

Определите, какую прибыль получила маленькая фирма «Кроха» в этом месяце, если известно, что ее предельные издержки описываются линейной функцией. Решение покажите на графике. (20 баллов)

Решение

Фирма «Кроха» работает на рынке совершенной конкуренции. Цена бирюлек на рынке в царстве царя Гороха составляет $(10000/400) = 25$ тугриков. Так как фирма при объеме производства 400 бирюлек обеспечила для себя наибольшую выгоду, то это значит, что она получила максимальную прибыль, т.е. ее предельные издержки оказались равны цене бирюлек и составили 25 тугриков.

Если бы фирма произвела 300 бирюлек, то ее средние общие издержки оказались бы равны $(25 - (1500/300)) = 20$ тугриков, и это их минимальное значение по условию. В точке минимума средних общих издержек они равны предельным издержкам, т.е. предельные издержки в этом случае оказались бы равны 20 тугриков.

Итак, при $Q=300$ бирюлек $MC=20$ тугриков, при $Q=400$ бирюлек $MC=25$ тугриков. А это значит, что функция предельных издержек имеет вид $MC=5+0,05 \cdot Q$. Следовательно, функция $TVC=5 \cdot Q+0,025 \cdot Q^2$.

При $Q=300$ бирюлек $TVC=3750$. Теперь можно найти величину общих постоянных издержек фирмы $(300 \cdot 25 - 1500 - 3750) = 2250$ тугриков.

Осталось найти прибыль фирмы при объеме производства 400 бирюлек. Учитывая, что при $Q=400$ бирюлек $TVC=6000$, получаем $\Pi = (10000 - 6000 - 2250) = 1750$ тугриков.

Критерии

Расчет прибыли	15 баллов
График	5 баллов

XXIX Международный экономический фестиваль школьников «Сибиряда. Шаг в мечту»

